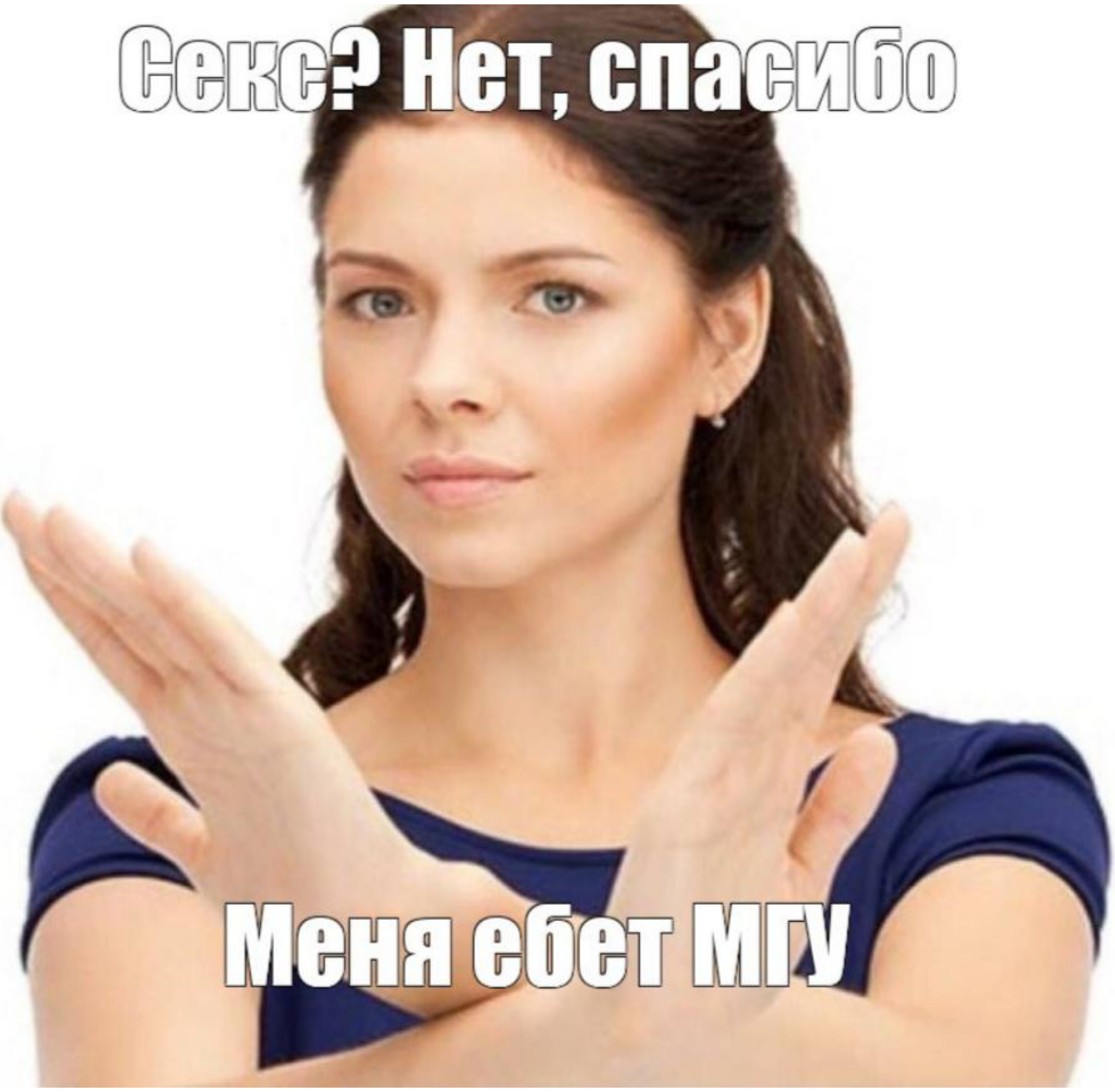
ТВИМС



Билет №1

1. Вероятностное пространство. Операции над событиями. Свойства вероятности.

Опр. Пространством элементарных исходов называется любое непустое множество Ω.

Опр. Алгеброй $\mathcal{A}$ называется класс подмножеств Ω, обладающий следующими свойствами:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Если $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$ и $A \cap B \in \mathcal{A}$
3. Если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$

Опр. σ-алгеброй $\mathcal{F}$ называется класс подмножеств Ω, обладающий следующими свойствами:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
3. Если $A \in \mathcal{F}$, то $\bar{A} \in \mathcal{F}$

Зам. Любая σ-алгебра является алгеброй, обратное неверно.

Опр. Событием называется элемент σ-алгебры $\mathcal{F}$.

Причем: $A = \varnothing$ – невозможное событие

$A = \Omega$ – достоверное событие

Операции над событиями:

- сумма событий A и B: $A \cup B = \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A$ или $\omega \in B\}$
- произведение событий A и B: $A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A, \omega \in B\}$
- разность событий A и B: $A \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A, \omega \notin B\}$
- дополнительное к A событие: $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Опр. σ-алгебра подмножеств Ω называется минимальной, если она содержится в $\forall$-ой σ-алгебре подмножеств Ω.

σ-алгебра подмножеств Ω называется максимальной, если она содержит $\forall$-ую σ-алгебру подмножеств Ω.

Опр. Наименьшая σ-алгебра содержащая мн-во B, называется σ-алгеброй, порожденной B. Обозн.: $\sigma(B)$

Опр. Вероятностью называется действительная ф-ия случайного события $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность);
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (Нормированность);
3. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ и $A_iA_j = \varnothing \ (i \neq j)$, то $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (σ-аддитивность).

Свойства вероятности:

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
2. Если $A, B \in \mathcal{F}$ и $A \subset B$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (монотонность)
3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$
5. Пусть $\{A_n\}$: $A_{n+1} \subset A_n$ и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(A)$

Д-во:

1. $\ast \{A_i\}$: $A_1 = \Omega, A_2 = \varnothing, \ldots, A_n = \varnothing, \ldots$ Тогда: $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \{A_iA_j = \varnothing \ (i \neq j)\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\Omega) + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\varnothing) = 1 + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\varnothing) \Rightarrow \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

2. Если $A \subset B$, то $B = (B \setminus A) \cup A$ и $(B \setminus A) \cdot A = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

3. $A = (A \setminus B) \cup AB, (A \setminus B) \cdot AB = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \setminus B) \cup AB) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(AB) \Rightarrow \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$

4. $A \cup B = A \cup (B \setminus AB)$, $B = AB \cup (B \setminus AB)$

$\ast \{A_i\}$: $A_1 = A, A_2 = B \setminus AB, A_i = \varnothing, i = 3, 4, \ldots, A_iA_j = \varnothing, (i \neq j)$

$\{B_i\}$: $B_1 = AB, B_2 = B \setminus AB, B_i = \varnothing, i = 3, 4, \ldots, B_iB_j = \varnothing, (i \neq j)$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus AB)$

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(B \setminus AB)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus AB) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$

5. $\ast \{C_n\}$: $C_n = A_n \setminus A_{n+1}, n \in \mathbb{N}, C_iC_j = \varnothing, (i \neq j)$

Тогда: $A_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \cup A$, $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \cup A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(A) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A)$

– ряд сходится $\Leftrightarrow$ его остатки $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, но $\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} C_n \cup A = A_k$, $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} C_n \cup A) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(A)$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим: $\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \mathbb{P}(A)$

$\square$

Аксиома конечной аддитивности: Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$, то $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Зам. Требование аксиомы непрерывности и конечной аддитивности вероятности эквивалентно σ-аддитивности вероятности.

Опр. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется вероятностным пространством, где Ω – пространство элементарных исходов

$\mathcal{F}$ – σ-алгебра над Ω

$\mathbb{P}$ – вероятность заданная на $\mathcal{F}$

2. Статистическая структура. Выборка. Порядковые статистики. Вариационный ряд. Выборочная ф-ия распределения. Их свойства

Опр. Статистической структурой называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_\theta)$, где

- Ω – пространство элементарных исходов;
- $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств Ω;
- $\mathcal{P}_\theta$ – семейство вероятностных мер, параметризованное параметром: $\mathcal{P}_\theta = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m\}$;

Опр. Выборкой $X = (X_1, \ldots, X_n)$ объема n называется набор из n независимых одинаково распределенных с.в.

Опр. Статистикой называется измеримая ф-ия от выборки, не зависящая от неизвестного параметра.

Опр. Вариационный ряд – набор с.в. $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ который получается при упорядочении выборки $X = (X_1, \ldots, X_n)$ по неубыванию на каждом элементарном исходе.

Опр. $X_{(1)}(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ – минимальная порядковая статистика

$X_{(n)}(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ – максимальная порядковая статистика

$X_{(k)}(\omega)$ – k-ая порядковая статистика

Опр. **Выборочной ф-цей распределения**, построенной по выборке $(X_1, \dots, X_n)$ называется случайная функция $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i < x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Т. Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ – повторная выборка значений с.в. X с ф.р. $F(x)$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)) = 1$

Д-во: $\exists$ $Y_i = \mathbb{1}(X_i < x)$. $Y_1, \dots, Y_n$ – н.о.р.с.в. Тогда $\mathbb{E} Y_i = \mathbb{P}(X_i < x) = F(x) < \infty$ по УЗБЧ Колмогорова : $F_n(x) = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E} Y_i = F(x)$ $\square$

Билет №2

1. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Опр. Пусть задано вероятностное пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Пусть $A, B \in \mathcal{F}$ и $\mathbb{P}(B) > 0$. **Условной вероятностью события A при условии, что известно, что произошло событие B,** называется число:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$$

Утв. Условная вероятность $\mathbb{P}(A \mid B)$ – вероятность, заданная на σ-алгебре $\mathcal{F}$

Д-во: Проверим справедливость трех аксиом:

1. $\forall A \in \mathcal{F}: \mathbb{P}(A \mid B) \geq 0 \; \{$т.к. $\mathbb{P}(AB) \geq 0$ и $\mathbb{P}(B) > 0\}$
2. $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cdot \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
3. Если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ и $A_i A_j = \varnothing \; (i \neq j)$, то

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \mid B) \qquad \square$$

Свойства условной вероятности:

1. Если $A \cap B = \varnothing$, то $\mathbb{P}(A \mid B) = 0$
2. Если $B \subset A$, то $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$

Т. (Формула полной вероятности)

Пусть $A, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ – события: $\mathbb{P}(B_i) > 0, \; i = 1, 2, \ldots, \; B_i B_j = \varnothing, \; (i \neq j)$ и $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Тогда: $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid B_i)$

Д-во: $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (AB_i)$ и $AB_i \cap AB_j = \varnothing, (i \neq j) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(AB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid B_i) \quad \square$

Т. (Формула Байеса)

Пусть даны события $A, H_1, \ldots, H_n, \ldots : \mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(H_i) > 0, i = 1, 2, \ldots, \; H_i H_j = \varnothing, (i \neq j)$ и $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$

Тогда справедлива формула Байеса:

$$\mathbb{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Д-во: По ФПВ: $\dfrac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_j) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_j)} = \dfrac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_i)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(AH_i)}{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(H_i)} = \dfrac{\mathbb{P}(AH_i)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(H_i \mid A) \quad \square$

2. Полные достаточные статистики. Теоремы Колмогорова и Рао-Блекуэлла-Колмогорова об оптимальных оценках.

Опр. Статистика $T = T(X)$ называется **достаточной для модели** $\mathcal{F} = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, если распределение выборки $X = (X_1, \ldots, X_n)$ не зависит от θ при условии $T(X) = t$.

Опр. Достаточная статистика $T(X)$ называется **полной**, если $\forall$ ф-ии $\varphi(z)$: из р-ва $\mathbb{E}_\theta \varphi(T(X)) = 0, \forall \theta \in \Theta$ следует, что $\varphi(T) \overset{\text{п.н.}}{=} 0$

Т. (Рао-Блекуэлла-Колмогорова)

Если оптимальная оценка существует, то она является функцией от достаточной статистики.

Д-во:

Вспомним св-ва условного мат ожидания: ① $\mathbb{E} f(X, Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X, Y) \mid Y))$ и ② $\mathbb{E}(g(X) \mid X) = g(X)$

Пусть $T(X)$ – достаточная статистика и $T_1(X)$ – несмещенная оценка для $\tau(\theta)$, т.е: $\mathbb{E} T_1(X) = \tau(\theta)$

Рассм. ф-ию $H(T) = \mathbb{E}(T_1 \mid T)$, тогда из ① $\Rightarrow \mathbb{E} H(T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(T_1 \mid T)) = \mathbb{E} T_1 = \tau(\theta) \Rightarrow H(T)$ – несмещенная оценка для $\tau(\theta)$

$$* \;\; \mathbb{E}\{(T_1 - H(T))(H(T) - \tau(\theta))\} = -\tau(\theta) \underbrace{\mathbb{E}(T_1 - H(T))}_{\mathbb{E} T_1 - \mathbb{E} H(T) = 0} + \mathbb{E} H(T)(T_1 - H(T)) = \mathbb{E} H(T)(T_1 - H(T)) = ① = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(H(T)(T_1 - H(T)) \mid T)\} = \{T\text{- фикс} \Rightarrow H(T) \sim const\} = \mathbb{E}(H(T) \underbrace{\mathbb{E}(T_1 - H(T) \mid T)}_{\mathbb{E}(T_1 \mid T) - H(T) = H(T) - H(T) = 0})$$

Тогда $\mathcal{D}(T_1) = \mathbb{E}(T_1 - \mathbb{E} T_1)^2 = \mathbb{E}(T_1 - \tau(\theta))^2 = \mathbb{E}(T_1 - H(T) + H(T) - \tau(\theta))^2 = \mathbb{E}(T_1 - H(T))^2 + \mathbb{E}(H(T) - \tau(\theta))^2 + 2 \underbrace{\mathbb{E}(T_1 - H(T))(H(T) - \tau(\theta))}_{0} = \mathbb{E}(T_1 - H(T))^2 + DH(T) \geq DH(T)$

$\Rightarrow H(T)$ – несмещенная оценка с минимальной (среди всех несм. оценок) дисперсией $\Rightarrow H(T)$ – оптимальная $\square$

Т. (Колмогорова)

Если $T(X)$ – полная достаточная статистика, то она является оптимальной оценкой своего математического ожидания.

Д-во:

Пусть $T_1(X)$ – о.о. $\mathbb{E} T$, тогда по т. Р-Б-К $T_1(X)$ – ф-ия от достаточной статистики $T(X)$, т.е $T_1 = H(T)$ и $\mathbb{E} T = \mathbb{E} T_1 \Rightarrow \mathbb{E} T - \mathbb{E} H(T) = \mathbb{E} \underbrace{(T - H(T))}_{\varphi(T)} = 0 \Rightarrow \{T(X)\text{ - полная}\} \Rightarrow T \overset{\text{п.н.}}{=} H(T) = T_1 \Rightarrow T$ – о.о. $\mathbb{E} T \quad \square$

1. Независимость событий. Критерий независимости.

Опр. Пусть задано вероятностное пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
События $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ называются **независимыми в совокупности**, если:
$\forall k = \overline{2,n}\ \forall i_1, \dots, i_k:\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j})$

Свойства независимых событий.

1. Если $A = \varnothing$ или $\mathbb{P}(A) = 0$, то $\forall B: \mathbb{P}(B) > 0$ события A и B — независимы.
2. Пусть A и B — независимы. Тогда $\bar{A}$ и B, A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — также независимы.
3. Пусть $A \subset B$ и $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) < 1$, тогда A и B — не являются независимыми.
4. Если события A и B независимы и $\mathbb{P}(B) > 0$, то $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Д-во:

1. $\rceil A = \varnothing \Rightarrow AB = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(AB) = 0$ и $\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = 0\cdot\mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$
   $\rceil \mathbb{P}(A) = 0$, тогда т.к. $AB \subset A \Rightarrow \mathbb{P}(AB) \le \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(AB) = 0$ и $\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$
2. Докажем независимость $\bar{A}$ и B:
   $B = AB \cup \bar{A}B \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(\bar{A}B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{A}B) \Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B) \Rightarrow \bar{A}$ и B — независимы
   Остальные утверждения док. аналогично.
3. Предположим, что они независимы, тогда $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$, но т.к. $A \subset B$, то $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1$ — противоречие.
4. $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$

Зам. Из попарной независимости $A_1, \dots, A_n$ не следует их независимость в совокупности $\square$

Обозначим $A_i^{(\delta)} = \begin{cases} A_i, & \delta = 1 \\ \bar{A_i}, & \delta = 0 \end{cases}$

Т. (Критерий независимости)
События $A_1, \dots, A_n$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow$
$\forall \delta_1, \dots, \delta_n \in \{0, 1\}: \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i^{(\delta_i)}\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^{(\delta_i)})$

Д-во:

$\boxed{\Rightarrow}$ Покажем, что $A_1, \dots, A_n$ — независимы $\Leftrightarrow \forall k = \overline{2,n}, \forall i_1, \dots, i_k: 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n, \forall \delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_k} \in \{0,1\} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_{i_j}^{(\delta_{i_j})}\right) = \prod\limits_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_{i_j}^{(\delta_{i_j})})$

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — независимы.
Индукция по числу μ событий A_{i_j}, для которых $\delta_{i_j} = 0$.
Если все $\delta_{i_j} = 1$ (т.е. $\mu = 0$), то утверждение — определение независимости.
Пусть утверждение справедливо для всех $\mu \le l$. Докажем для $\mu = l+1$
т.е. покажем: $\mathbb{P}(\bar{A}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{i_{l+1}} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_{l+1}}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_{l+2}}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$

Заметим, что: $\bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{i_l} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k} = \bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{i_{l+1}} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k} \cup \bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_{l+1}} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}$

Тогда $\mathbb{P}(\bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{i_l} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{i_{l+1}} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) + \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_{l+1}} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k})$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{i_{l+1}} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{i_l} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) - \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1} \cdot \bar{A}_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_{l+1}} \cdot A_{i_{l+2}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) =$

$= \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_l}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_{l+2}}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}) - \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_l}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_{l+1}}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}) = \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_l}) \cdot (1 - \mathbb{P}(A_{l+1})) \cdot \mathbb{P}(A_{i_{l+2}}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}) =$

$= \mathbb{P}(\bar{A}_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_l}) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}_{i_{l+1}}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_{l+2}}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$

т.е. мы доказали утверждение для некоторого k, в частности при $k = n$: $\mathbb{P}(A_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot A_n^{\delta_n}) = \mathbb{P}(A_1^{\delta_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n^{\delta_n})$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть теперь $\mathbb{P}(A_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot A_n^{\delta_n}) = \mathbb{P}(A_1^{\delta_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n^{\delta_n})$ покажем что, $\mathbb{P}(A_{i_1}^{\delta_{i_1}} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}^{\delta_{i_k}}) = \mathbb{P}(A_{i_1}^{\delta_{i_1}}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_k}^{\delta_{i_k}})$, $\forall k = \overline{2,n}$
Индукция по k: при $k = n$ — утверждение справедливо.
Предположим, что оно справедливо $\forall k \ge l+1$. Докажем для $k = l$.

$A_{i_1}^{(\delta_1)} \cdot \ldots \cdot A_{i_l}^{(\delta_l)} = A_{i_1}^{(\delta_1)} \cdot \ldots \cdot A_{i_l}^{(\delta_l)} \cdot A_{i_{l+1}}^{(1)} \cup A_{i_1}^{(\delta_1)} \cdot \ldots \cdot A_{i_l}^{(\delta_l)} \cdot A_{i_{l+1}}^{(0)}$

Тогда: $\mathbb{P}(A_{i_1}^{(\delta_1)} \cdot \ldots \cdot A_{i_l}^{(\delta_l)}) = \mathbb{P}(A_{i_1}^{(\delta_1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_l}^{(\delta_l)}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_{l+1}}^{(1)}) + \mathbb{P}(A_{i_1}^{(\delta_1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_l}^{(\delta_l)}) \cdot (1 - \mathbb{P}(A_{i_{l+1}}^{(1)})) = \mathbb{P}(A_{i_1}^{(\delta_1)}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_l}^{(\delta_l)})$ $\square$

2. Проверка гипотез. Лемма Неймана-Пирсона.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — повторная выборка, $\theta \in \Theta$ и имеем 2 простые гипотезы: $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$; Пусть $L(y; \theta)$ — ф-ия правдоподобия, $L_0(y) = L(y; \theta_0)$, $L_1(y) = L(y; \theta_1)$

Отношением правдоподобия называется величина $\dfrac{L_1(y)}{L_0(y)}$

Лемма (Неймана-Пирсона)
Для $\forall \alpha \in [0,1]\ \exists$ постоянные $c > 0$ и $\varepsilon \in [0,1]$ такие, что φ-критерий: $\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & L_1(y) > c L_0(y) \\ \varepsilon, & L_1(y) = c L_0(y) \\ 0, & L_1(y) < c L_0(y) \end{cases}$ является оптимальным критерием, т.е. наиболее мощным среди всех φ-критериев значимости α.

Д-во: c и ε

Введем ф-ию $g(c) = \mathbb{P}(L_1(Y) \ge c L_0(Y) | H_0)$

Тогда $1 - g(c) = \mathbb{P}(L_1(Y) < L_0(Y) | H_0) = \mathbb{P}\left(\frac{p_1(Y)}{p_0(Y)} < c \,|\, H_0\right)$ — ф-ия распределения $\Rightarrow$

$g(c)$: 1) не возрастает; 2) непрерывна слева; 3) $g(0) = 1$; $g(+\infty) = 0$

По заданному α определим c_α из выражений:

$c_\alpha: \begin{cases} g(c_\alpha + 0) < \alpha \le g(c_\alpha), & \text{если } c_\alpha \text{ — т. разрыва } g(c) \\ \alpha = g(c_\alpha), & \text{иначе} \end{cases}$

Для $g(c)$ возможны 3 случая:

1. $g(c)$ имеет разрыв в т. "пересечения" с $y = \alpha \Rightarrow$ в нек. т. c_0: $g(c_0) > \alpha > g(c_0 + 0)$, Тогда $c_\alpha = c_0$
2. $g(c)$ непрерывна и значение равное α достигается в $!$ т. c_0, тогда $c_\alpha = c_0$
3. $g(c)$ непрерывна и з-ие равное α достигается на $[c_1, c_2]$, тогда берем $\forall c_0 \in [c_1, c_2]$ и $c_\alpha = c_0$

c_α определенное таким образом есть искомое c из $\varphi^*(y)$

ε определим сл. образом:

- в случаях 2 и 3 $\varepsilon = 0$
- в случае 1 положим $\varepsilon = \dfrac{\alpha - g(c_\alpha + 0)}{g(c_\alpha) - g(c_\alpha + 0)}$

оптимальность и α

Ф-ия плотности $W(\varphi;\theta_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(y) L_0(y)\,dy = \int\limits_{L_1 > c\cdot L_0} L_0(y)\,dy + \varepsilon \int\limits_{L_1 = c\cdot L_0} L_0(y)\,dy + 0 = \int\limits_{L_1 > c\cdot L_0} L_0(y)\,dy + \int\limits_{L_1 = c\cdot L_0} L_0(y)\,dy + (\varepsilon - 1)\int\limits_{L_1 = c\cdot L_0} L_0(y)\,dy = \int\limits_{L_1 \geq c\cdot L_0} L_0(y)\,dy + (\varepsilon - 1)\int\limits_{L_1 = c\cdot L_0} L_0(y)\,dy = \mathbb{P}_{\theta_0}(L_1(y) \geq c\cdot L_0(y)) + (\varepsilon - 1)\mathbb{P}_{\theta_0}(L_1(y) = c\cdot L_0(y)) =$

$= g(c_\alpha) + (\varepsilon - 1)(g(c_\alpha) - g(c_\alpha + 0)) = \left\{ \varepsilon - 1 = \dfrac{\alpha - g(c_\alpha)}{g(c_\alpha) - g(c_\alpha + 0)} \right\} = \begin{cases} g(c_\alpha) + \alpha - g(c_\alpha), & \text{для } 1 \\ g(c_\alpha + 0), & \text{для } 2 \text{ и } 3 \end{cases} = \{ g(c_\alpha + 0) = g(c_\alpha) \text{ для } 2 \text{ и } 3 \} = \alpha \Rightarrow \varphi^*$-крит. имеет уровень значимости α

Пусть $\forall\, \varphi$-крит. имеет ур. з. α, докажем, что $W(\varphi^*, \theta_1) \geq W(\varphi, \theta_1)$:

$* \quad I = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varphi^*(y) - \varphi(y))(L_1(y) - c_\alpha L_0(y))\,dy = \int\limits_{\varphi^* > \varphi} \ldots dy + \int\limits_{\varphi^* < \varphi} \ldots dy = I_1 + I_2$

I_1: $\varphi^*(y) > \varphi(y) \geq 0 \Rightarrow \varphi^*(y) > 0 \Leftrightarrow L_1(y) \geq c_\alpha L_0(y) \Rightarrow I_1 \geq 0$

I_2: $\varphi^*(y) < \varphi(y) \leq 1 \Rightarrow \varphi^*(y) < 1 \Leftrightarrow L_1(y) \leq c_\alpha L_0(y) \Rightarrow I_2 \geq 0$

$\Rightarrow \quad 0 \leq I = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(y) L_1(y)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) L_1(y)\,dy - c_\alpha\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(y) L_0(y)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) L_0(y)\,dy\right) = W(\varphi^*, \theta_1) - W(\varphi, \theta_1) - c_\alpha(\underbrace{W(\varphi^*, \theta_0)}_{\alpha} - \underbrace{W(\varphi, \theta_0)}_{\alpha}) = W(\varphi^*, \theta_1) - W(\varphi, \theta_1)$

$\Rightarrow \quad W(\varphi^*, \theta_1) \geq W(\varphi, \theta_1) \quad \square$

Билет №4.

1. Закон больших чисел в форме Хинчина. Центральная предельная теорема

Т. (ЗБЧ в форме Хинчина)

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями, то для нее имеет место сходимость: $\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1$

Д-во:

Лемма. Если $\xi_n \Rightarrow c = const$, $\xi_n \xrightarrow{P} c$

Д-во: Пусть $\xi_n \Longrightarrow c$, т.е. $F_{\xi_n}(x) \longrightarrow F_c(x) = \begin{cases} 0, & x \le c \\ 1, & x > c \end{cases}$, $\forall x$ - точки непр-ти $F_c(x)$, т.е. $\forall x \neq c$

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$, тогда $\mathbb{P}(|\xi_n - c| < \varepsilon) = \mathbb{P}(-\varepsilon < \xi_n - c < \varepsilon) = \mathbb{P}(c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon) \geq \mathbb{P}(c - \underbrace{\tfrac{\varepsilon}{2} \le}_{!!!} \xi_n < c + \varepsilon) = F_{\xi_n}(c+\varepsilon) - F_{\xi_n}(c - \frac{\varepsilon}{2}) \longrightarrow F_c(c+\varepsilon) - F_c(c - \frac{\varepsilon}{2}) = 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(|\xi_n - c| < \varepsilon) \longrightarrow 1 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} c$ □

Вернемся к д-ву теоремы.

Из леммы $\Rightarrow$ сходимость к const по вероятности эквивалентна слабой сходимости.

Обозн. $a = E\xi_1 = const$. Покажем $\frac{S_n}{n} \Rightarrow a$. $\frac{S_n}{n} \Rightarrow a \iff \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) \to \varphi_a(t) = \mathbb{E}e^{ita} = e^{ita}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{S_n}(\frac{t}{n}) = (\varphi_{\xi_1}(\frac{t}{n}))^n$

т.к. $E|\xi_1| < \infty$, то по ф. Тэйлора: $\varphi_{\xi_1}(t) = 1 + it\mathbb{E}\xi_1 + o(t) = 1 + ita + o(t)$

$\varphi_{\xi_1}(\frac{t}{n}) = 1 + \frac{ita}{n} + o(\frac{t}{n})$

$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = (\varphi_{\xi_1}(\frac{t}{n}))^n = (1 + \frac{ita}{n} + o(\frac{t}{n}))^n = (1 + \frac{ita}{n})^n + o(\frac{t}{n}) \cdot (\ldots) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \{(1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x\} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{ita}$

$\Rightarrow \frac{S_n}{n} \Rightarrow a \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$

□

Т. (Центральная предельная теорема)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $E\xi_1 = a$, $0 < D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$.

Тогда: $\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - na}{\sqrt{n\sigma^2}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Д-во:

Введем $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $X = \xi_1 - a$ и $\varphi_X(t) = Ee^{itX}$

Также введем $\varphi_n(t) = E e^{it \cdot \frac{S_n - na}{\sqrt{n\sigma^2}}} = \left(\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$

В силу разложения хар. ф-ии: $\varphi_X(t) = 1 + it\mathbb{E}X + \ldots + \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}X^n + R_n(t)$

Учитывая, что $\mathbb{E}X = \mathbb{E}(\xi_1 - a) = 0$, при $n = 2$: $\varphi_X(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)$, $t \to 0$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$: $\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\frac{t^2}{2}}{n}\right)^n + o\left(\frac{t^2}{\sigma\sqrt{n}}\right) \cdot (\ldots) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi_{N(0,1)}(x)$

В силу т. о непр. соответствии между хар. ф-ями и ф-ями распределения т. доказана.

□

2. Доверительные интервалы. Метод использования точечной оценки.

Опр. Пусть $Y = (X_1, \ldots, X_n)$ – выборка. Доверительным интервалом для θ с коэффициентом доверия γ называется интервал $(T_1(Y), T_2(Y))$: $\mathbb{P}(T_1(Y) < \theta < T_2(Y)) \geq \gamma$, где $T_1(Y) \overset{п.н.}{\leq} T_2(Y)$ – статистики

Пусть $T(Y)$ – точечная оценка θ. Обозн: $H(t, \theta) = \mathbb{P}_\theta(T(Y) < t)$

$H(t,\theta)$ – непрерывная и строго монотонная по θ ф-ия при фикс. θ. Тогда: $\begin{cases} \mathbb{P}_\theta(T(Y) > t_1(\theta)) = \frac{1-\gamma}{2} \\ \mathbb{P}_\theta(T(Y) < t_2(\theta)) = \frac{1-\gamma}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - H(t_1(\theta) + 0, \theta) = \frac{1-\gamma}{2} \\ H(t_2(\theta), \theta) = \frac{1-\gamma}{2} \end{cases}$

Лемма. Если $H(t,\theta)$ – возрастает по θ, то $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ – убывают по θ. Если $H(t,\theta)$ – убывает по θ, то $t_1(\theta)$ и $t_2(\theta)$ – возрастают по θ

Д-во: $\exists$ $H(t,\theta)$ – возрастает. Предположим, что из $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow t_2(\theta_1) \leq t_2(\theta_2)$. Тогда $\frac{1-\gamma}{2} = H(t_2(\theta_1), \theta_1) < H(t_2(\theta_1), \theta_2) \leq \{\{T < t_2(\theta_1)\} \subset \{T < t_2(\theta_2)\}\} \leq H(t_2(\theta_2), \theta_2) = \frac{1-\gamma}{2} \Rightarrow \frac{1-\gamma}{2} < \frac{1-\gamma}{2}$ – противоречие □

Из леммы следует, что $\forall \theta \in \Theta$: Пусть φ_1 и φ_2 обратные к $t_1(\theta), t_2(\theta)$ функции

$t_1(\theta) < T(Y) \iff \theta > \varphi_1(T(Y)) \Rightarrow \mathbb{P}_\theta(\theta > \varphi_1(T(Y))) = \frac{1-\gamma}{2}$

$t_2(\theta) > T(Y) \iff \theta < \varphi_2(T(Y)) \Rightarrow \mathbb{P}(\theta < \varphi_2(T(Y)) = \frac{1-\gamma}{2}$

Тогда $(\varphi_2(T(Y)), \varphi_1(T(Y)))$ – доверительный интервал

с уровнем доверия $\mathbb{P}(\varphi_2 < \theta < \varphi_1) = 1 - \mathbb{P}(\theta \leq \varphi_2) - \mathbb{P}(\theta \geq \varphi_1) = 1 - (1-\gamma) = \gamma$

Билет №5.

1. Виды сходимости последовательностей случайных величин.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и последовательность $\xi, \xi_1,$. случайных величин на нем.

Опр. Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится почти наверное к случайной величине ξ, если при $n \to \infty$: $\mathbb{P}\{\omega / \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\} = 1$. Обозн.: $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$

Опр. Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится по вероятности к случайной величине ξ, если $\forall \varepsilon > 0$ при $n \to \infty$: $\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0$. Обозн.: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$

Опр. Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится в среднем порядка r к случайной величине ξ, если при $n \to \infty$: $\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^r \to 0$. Обозн.: $\xi_n \xrightarrow{(r)} \xi$

Опр. Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин сходится по распределению к случайной величине ξ, если при $n \to \infty$: $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$, $\forall x$ – точки непр-ти $F_\xi(x)$. Обозн.: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Опр. Говорят, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин слабо сходится к случайной величине ξ, если $\forall$ непрер. огр. ф-ции $f(x)$ при $n \to \infty$: $\mathbb{E}f(\xi_n) \to \mathbb{E}f(\xi)$. Обозн.: $\xi_n \Rightarrow \xi$

Утв. Вышеуказанные виды сходимости связаны следующими соотношениями

$$\begin{array}{l} \boxed{\xrightarrow{п.н.}} \searrow \\ \qquad \boxed{\xrightarrow{P}} \Rightarrow \boxed{\xrightarrow{d}} \Leftrightarrow \boxed{\Rightarrow} \\ \boxed{\xrightarrow{(r)}} \nearrow \end{array}$$

Д-во: $\boxed{\xrightarrow{(r)} \Rightarrow \xrightarrow{P}}$ Используем неравенство Маркова: $\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\xi_n - \xi|^r \geq \varepsilon^r) \leq \dfrac{E|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\boxed{\xrightarrow{(r)} \not\Leftarrow \xrightarrow{P}}$, $\boxed{\xrightarrow{(r)} \not\Leftarrow \xrightarrow{п.н.}}$ $\exists\ ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ – вероятностное пр-во.

$\ast\ \xi_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq \omega \leq 1 \end{cases}$

Очевидно, что $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ (и более того $\xi_n \xrightarrow{п.н.} 0$), но $E|\xi_n|^r = \dfrac{e^{rn}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \infty, \forall r > 0$

$\boxed{\xrightarrow{п.н.} \Rightarrow \xrightarrow{P}}$ Пусть $\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi$, но $\xi_n \not\xrightarrow{P} \xi$.

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \varepsilon' > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}) < \varepsilon'$

Тогда $\xi_n \not\xrightarrow{P} \xi \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \varepsilon_0' > 0: \forall N \in \mathbb{N}: \exists n \geq N\ \mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon_0\}) \geq \varepsilon_0'$ (*)

$\xi_n \xrightarrow{п.н.} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$

$\Rightarrow$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$: $\mathbb{P}(\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon_0\}) = 0$, что противоречит (*)

$\boxed{\xrightarrow{п.н.} \not\Leftarrow \xrightarrow{P}}$, $\boxed{\xrightarrow{п.н.} \not\Leftarrow \xrightarrow{(r)}}$ $\exists\ ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ – вероятностное пр-во

Положим $\xi \equiv 0$, $\xi_{2^k} = \mathbb{1}([0, \frac{1}{2^k}])$, $\xi_{2^k+p} = \mathbb{1}([\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}])$, $p = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$

Тогда $\xi_n \xrightarrow{P} 0$, т.к. $\mathbb{P}(\xi_{2^k+p} > 0) \leq \lambda([\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}]) \leq \frac{1}{2^k} \to 0$

и $\xi_n \xrightarrow{(r)} 0$, т.к. $E|\xi_{2^k+p}|^r = \lambda(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

но $\xi_n \not\xrightarrow{п.н.} 0$, т.к. $\forall \omega\ \exists$ бесконечно много n: $\xi_n(\omega) = 1$.

$\boxed{\xrightarrow{P} \Rightarrow \Rightarrow}$ $\exists f$ – огр. непр. ф-ия: $|f| \leq C$.

Зафикс. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \exists \delta$:

1. $\mathbb{P}(\xi > x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \mathbb{P}(|\xi| > N) \leq \frac{\varepsilon}{6C}$
2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \Rightarrow \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > \delta) \leq \frac{\varepsilon}{6C}$, $\forall n \geq N$
3. $f \in C[-N, N] \Rightarrow f$ – р.н. на $[-N, N]$ $\Rightarrow \forall x, y: |x| < N, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$\ast$ события:

$A_1 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta\} \cap \{|\xi| < N\}$ и

$A_2 = \{|\xi_n - \xi| \leq \delta\} \cap \{|\xi| \geq N\}$ и

$A_3 = \{|\xi_n - \xi| > \delta\}$

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$$|\mathbb{E}f(\xi_n) - \mathbb{E}f(\xi)| = |\mathbb{E}(f(\xi_n) - f(\xi))| \leq \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(\xi)| = \mathbb{E}\big[|f(\xi_n) - f(\xi)| \cdot (I(A_1) + I(A_2) + I(A_3))\big] \leq \frac{\varepsilon}{3} \underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{\leq 1} + 2C\big(\underbrace{\mathbb{P}(A_2)}_{\leq \frac{\varepsilon}{6C}} + \underbrace{\mathbb{P}(A_3)}_{\leq \frac{\varepsilon}{6C}}\big) \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2C\left(\frac{\varepsilon}{6C} + \frac{\varepsilon}{6C}\right) = \varepsilon$$

(т.к. $\mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(A_1)$)

$\Rightarrow |\mathbb{E}f(\xi_n) - Ef(\xi)| \to 0 \Rightarrow \xi_n \Rightarrow \xi$

$\boxed{\xrightarrow{P} \not\Leftarrow \Rightarrow}$ $\exists\ (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вер-ое пр-во, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\xi_n(\omega_1) = 1$, $\xi_n(\omega_2) = -1$. Положим $\xi = -\xi_n$

Тогда: $\mathbb{E}f(\xi_n) = \dfrac{f(1) + f(-1)}{2} = Ef(\xi)$

но $\forall n\ |\xi_n - \xi| = 2 \Rightarrow \xi_n \not\xrightarrow{P} \xi$

$\boxed{\Rightarrow \Leftrightarrow \xrightarrow{d}}$ без доказательства

$\square$

Т. (непрерывности)

Слабая сходимость последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ к случайной величине ξ эквивалентна сходимости последовательности соотв. хар. ф-ций $\varphi_{\xi_1}(t), \varphi_{\xi_2}(t)$ к хар. ф-ции $\varphi_\xi(t)$ при $n \to \infty$ в каждой точке $t \in \mathbb{R}$

Д-во: без д-ва $\square$

2. Полные достаточные статистики. Теоремы Колмогорова и Рао–Блекуэлла–Колмогорова об оптимальных оценках.

Опр. Статистика $T=T(X)$ называется *достаточной для модели* $\mathcal{F}=\{F(x,\theta),\theta\in\Theta\}$, если распределение выборки $X=(X_1,\dots,X_n)$ не зависит от θ при условии $T(X)=t$.

Опр. Достаточная статистика $T(X)$ называется *полной*, если $\forall$ ф-ии $\varphi(z)$: из р-ва $\mathbb{E}_\theta\varphi(T(X))=0, \forall\theta\in\Theta$ следует, что $\varphi(T)\overset{\text{п.н.}}{=}0$

Т. (Рао – Блекуэлла – Колмогорова)

Если оптимальная оценка существует, то она является функцией от достаточной статистики.

Д-во:

Вспомним св-ва условного мат ожидания: ① $\mathbb{E}f(X,Y)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X,Y)|Y))$ и ② $\mathbb{E}(g(X)|X)=g(X)$

Пусть $T(X)$ – достаточная статистика и $T_1(X)$ – несмещенная оценка для $\tau(\theta)$, т.е: $\mathbb{E}T_1(X)=\tau(\theta)$

Рассм. ф-ию $H(T)=\mathbb{E}(T_1|T)$ (не зависит от θ, т.к T-дост), тогда из ① $\Rightarrow$ $\mathbb{E}H(T)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(T_1|T))=\mathbb{E}T_1=\tau(\theta) \Rightarrow H(T)$ – несмещенная оценка для $\tau(\theta)$

$*$ $\mathbb{E}\{(T_1-H(T))(H(T)-\tau(\theta))\}=-\tau(\theta)\underbrace{\mathbb{E}(T_1-H(T))}_{\mathbb{E}T_1-\mathbb{E}H(T)=0}+\mathbb{E}H(T)(T_1-H(T))=\mathbb{E}H(T)(T_1-H(T))=① =\mathbb{E}\{\mathbb{E}(H(T)(T_1-H(T))|T)\}=\{T\text{ - фикс}\Rightarrow H(T)\sim\text{const}\}=\mathbb{E}(H(T)\underbrace{\mathbb{E}(T_1-H(T)|T)}_{\mathbb{E}(T_1|T)-H(T)=H(T)-H(T)=0})$

Тогда $\mathcal{D}(T_1)=\mathbb{E}(T_1-\mathbb{E}T_1)^2=\mathbb{E}(T_1-\tau(\theta))^2=\mathbb{E}(T_1-H(T)+H(T)-\tau(\theta))^2=\mathbb{E}(T_1-H(T))^2+\mathbb{E}(H(T)-\tau(\theta))^2+2\underbrace{\mathbb{E}(T_1-H(T))(H(T)-\tau(\theta))}_{0}=\mathbb{E}(T_1-H(T))^2+\mathcal{D}H(T)\geqslant\mathcal{D}H(T)$

$\Rightarrow H(T)$ – несмещенная оценка с минимальной (среди всех несм. оценок) дисперсией $\Rightarrow H(T)$ – оптимальная $\square$

Т. (Колмогорова)

Если $T(X)$ – полная достаточная статистика, то она является оптимальной оценкой своего математического ожидания.

Д-во:

Пусть $T_1(X)$ – о.о. $\mathbb{E}T$, тогда по т. Р-Б-К $T_1(X)$ – ф-ия от достаточной статистики $T(X)$, т.е $T_1=H(T)$ и $\mathbb{E}T=\mathbb{E}T_1 \Rightarrow \mathbb{E}T-\mathbb{E}H(T)=\mathbb{E}\underbrace{(T-H(T))}_{\varphi(T)}=0\Rightarrow\{T(X)\text{ - полная}\}\Rightarrow T\overset{\text{п.н.}}{=}H(T)=T_1\Rightarrow T$ – о.о. ET $\square$

Билет №6

1. Неравенство Колмогорова.

Т. (Неравенство Колмогорова)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$: $\mathbb{P}\left(\sup\limits_{1 \le k \le n} |S_k - \mathbb{E}S_k| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \dfrac{\mathcal{D}S_n}{\varepsilon^2}$, где $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$

Д-во: Не ограничивая общности будем считать, что $\mathbb{E}\xi_k = 0$

Обозначим: $B = \left\{ \sup\limits_{1 \le k \le n} |S_k| \geqslant \varepsilon \right\}$

$$B_k = \{ |S_1| < \varepsilon, |S_2| < \varepsilon, \ldots, |S_{k-1}| < \varepsilon, |S_k| \geqslant \varepsilon \}, k = \overline{1,n}$$

Тогда $B_1, \ldots, B_n$ — попарно несовместны и $B = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$

$$S_n^2 \geqslant S_n^2 \cdot \mathbb{1}_B = S_n^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{B_k} = \sum_{k=1}^{n} S_n^2 \mathbb{1}_{B_k} = \sum_{k=1}^{n} (S_n - S_k + S_k)^2 \mathbb{1}_{B_k} = \sum_{k=1}^{n} S_k^2 \mathbb{1}_{B_k} + 2\sum_{k=1}^{n} S_k (S_n - S_k) \mathbb{1}_{B_k} + \sum_{k=1}^{n} (S_n - S_k)^2 \mathbb{1}_{B_k}$$

$$\mathcal{D}S_n = \mathbb{E}S_n^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 \mathbb{1}_{B_k}) + 2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k \mathbb{1}_{B_k})(S_n - S_k)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((S_n - S_k)^2 \mathbb{1}_{B_k}) \geqslant$$

Ф-ия $S_k \mathbb{1}_{B_k} = \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$

$S_n - S_k = \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n = \psi(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$

С.в. $S_k \mathbb{1}_{B_k}$ и $S_n - S_k$ — независимы $\Rightarrow 2\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k \mathbb{1}_{B_k}) \mathbb{E}(S_n - S_k) = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_n - S_k)^2 \mathbb{1}_{B_k} \geqslant 0$

$$\Rightarrow \ominus \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(S_k^2 \; B_k)$$

$$\mathbb{E}(S_k^2 I_{B_k}) = \int_{B_k} S_k^2 \mathbb{P}(d\omega) \text{ и } S_k^2 \geqslant \varepsilon^2 \Rightarrow \mathbb{E}(S_k^2 I_{B_k}) \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{P}(B_k) \Rightarrow$$

$$DS_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^2 \mathbb{P}(B_k) = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \varepsilon^2 \mathbb{P}(B) \Rightarrow \mathbb{P}(B) \leqslant \frac{DS_n}{\varepsilon^2} \quad \square$$

2. Метод моментов. Свойства оценок полученных методом моментов.

Рассмотрим статистическую модель $\mathcal{F} = \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка.

Предположим, что существует математическое ожидание $\mathbb{E}X^k = \beta_k$ (Тогда $\exists\ \mathbb{E}X^l = \beta_l$, $l = \overline{1,k-1}$)

По выборке X построим эмпирические моменты $a_i = \frac{1}{n}(x_1^i + \ldots + x_n^i)$

Метод моментов заключается в приравнивании теоретических и выборочных моментов. Обозначим $\mathbb{E}X^i = f_i(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ тогда получаем систему относительно $\theta_1, \ldots, \theta_k$:

$$\begin{cases} a_1 = f_1(\theta_1, \ldots, \theta_k) \\ \ldots \\ a_k = f_k(\theta_1, \ldots, \theta_k) \end{cases} (*) \iff \left\{ \begin{matrix} \text{Если } (*) \\ \text{разрешима} \end{matrix} \right\} \iff \begin{cases} \theta_1 = \varphi_1(a_1, \ldots, a_k) \\ \vdots \\ \theta_k = \varphi_k(a_1, \ldots, a_k) \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{\theta}_1(X) = \varphi_1(A_1, \ldots, A_k) \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_k(X) = \varphi_k(A_1, \ldots, A_k) \end{cases}$$

Опр. *Оценками по методу моментов* называется решение $\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_k$ системы (*)

Т. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_k$ являются непрерывными ф-иями от выборочных моментов: $\tilde{\theta}_i(X) = \varphi_i(A_1, \ldots, A_k)$, $i = \overline{1,k}$.

Тогда оценки, полученные методом моментов будут состоятельны и асимптотически несмещены.

Д-во:

Система разрешима: $\tilde{\theta}_i = \varphi_i(A_1, \ldots, A_k) \Rightarrow$ по УЗБЧ $A_i \xrightarrow[n \to \infty]{п.н.} \mathbb{E}X^i$, а из непр-ти φ_i оценки $\tilde{\theta}_i \xrightarrow[n \to \infty]{P} \theta_i$ $\square$

Билет №7

1. Лемма Бореля-Кантелли

Опр. Верхним пределом последовательности множеств $\{A_n\}$ называется множество $A \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

Опр. Последовательность событий $A_1, \dots, A_n, \dots$ называется независимой, если $\forall N,\ \forall i_1, \dots, i_N: 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_N$ события $A_{i_1}, \dots, A_{i_N}$ – независимы.

Лемма (Бореля-Кантелли)

Справедливы следующие импликации:

1) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, то $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n) = 0$

2) Если $A_1, \dots, A_n, \dots$ – независимы и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, то $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n) = 1$

Д-во:

1) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \{$ряд сход. $\Rightarrow$ остаток $\to 0\} \Rightarrow \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Тогда $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n) = \mathbb{P}(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k) \le \{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k, \forall n\} \le \mathbb{P}(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k) \le \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) Заметим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$, где $\overline{B_n} = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}$

Тогда $\mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n}) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{B_n})$

т.к $A_1, \dots, A_n, \dots$ – независимы, то $\mathbb{P}(\overline{B_n}) = \mathbb{P}(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}) = \prod\limits_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod\limits_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k)) = 0$ (т.к $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ и $\mathbb{P}(A_k) \le 1, \forall k$)

$\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n}) \le 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n}) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_n A_n) = 1$

$\square$

2. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия.

Рассм. статистическую модель $\mathcal{F} = \{F(x,\theta), \theta \in \Theta\}$, пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка и $L(x,\theta)$ – функция правдоподобия.

Опр. Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра θ называется статистика $\hat{\theta}(X)$: $L(x, \hat{\theta}(x)) = \sup\limits_{\theta \in \Theta} L(x,\theta)$

Утв 1. Если $\exists$ эффективная оценка $T = T(X)$ скалярного параметра θ, то она совпадает с оценкой максимального правдоподобия.

Д-во: Если $T(X)$ – эффективная оценка, то в неравенстве Рао-Крамера достигается равенство $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} = c(\theta)(T(X) - \theta) \Rightarrow T(X) \text{ – ОМП } \theta \ \square$$

Утв 2. Если $T = T(X)$ достаточная статистика, а оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ существует и единственна, то она является функцией от $T(X)$

Д-во: $T(X)$ – достаточная статистика $\Rightarrow$ {крит. факторизации} $\Rightarrow L(x,\theta) = g(T(x),\theta)h(x) \Rightarrow$ максимизация L сводится к максимизации $g(T(X),\theta)$ по $\theta \Rightarrow \hat{\theta}$ – ф-ия от T $\square$

Утв 3. (Принцип инвариантности ОМП)

Пусть $f: \Theta \to \mathcal{F}$. Тогда если $\hat{\theta}$ – ОМП для θ, то $f(\hat{\theta})$ – ОМП для $f(\theta)$

Д-во: т.к. $\sup\limits_{\theta \in \Theta} L(x,\theta) = \sup\limits_{z \in \mathcal{F}} L(x, f^{-1}(z))$, то если sup в левой части достигается при $\theta = \hat{\theta}$, то в правой при $z = \hat{z}$: $f^{-1}(\hat{z}) = \hat{\theta} \Rightarrow \hat{z} = f(\hat{\theta})$ $\square$

Билет №8.

1. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова.

Т. (УЗБЧ в форме Колмогорова)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty$

Тогда: $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - \sum\limits_{k=1}^{n} E\xi_k}{n} \xrightarrow{п.н.} 0$

Д-во: $\exists\ \tilde{\xi}_i = \xi_i - E\xi_i$, $E\tilde{\xi}_i = 0$, $D\tilde{\xi}_i = D\xi_i = \sigma_k^2$

$\exists\ S_n = \tilde{\xi}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n$ и $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n)$

Покажем, что $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{п.н.} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ P\left(\sup\limits_{k \geq n} \frac{|S_k|}{k} > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\exists$ события $A_n = \left\{ \max\limits_{2^{n-1} \leq k < 2^n} \frac{|S_k|}{k} > \varepsilon \right\}$ Тогда

$\forall \varepsilon > 0\ P\left(\sup\limits_{k \geq n} \frac{|S_k|}{k} > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Leftrightarrow P\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. $P\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} P(A_k) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \Leftrightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ Покажем это.

$P(A_n) = P\left(\max\limits_{2^{n-1} \leq k < 2^n} \frac{|S_k|}{k} > \varepsilon\right) \leq P\left(\max\limits_{2^{n-1} \leq k < 2^n} |S_k| > \varepsilon \cdot 2^{n-1}\right) \leq P\left(\max\limits_{k < 2^n} |S_k| > \varepsilon \cdot 2^{n-1}\right) \leq \{\text{Н-во Колмогорова}\} \leq \frac{DS_{2^n}}{\varepsilon^2 2^{2(n-1)}} = 4\varepsilon^{-2} 2^{-2n} \sum\limits_{k \leq 2^n} \sigma_k^2$

Тогда $\frac{\varepsilon^2}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{-2n} \cdot \sum\limits_{k \leq 2^n} \sigma_k^2\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \sum\limits_{n: 2^n \geq k} 2^{-2n} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \left(k^{-2} \cdot \frac{1}{1-4}\right) = \frac{4}{3} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ — сходится $\square$

2. Статистическая структура. Выборка. Статистика. Выборочные моменты. Их свойства.

Опр. Статистической структурой называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_\theta)$, где
- Ω — пространство элементарных исходов;
- $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств Ω;
- $\mathcal{P}_\theta$ — семейство вероятностных мер, параметризованное параметром: $\mathcal{P}_\theta = \{P_\theta : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m\}$;

Опр. Выборкой $X = (X_1, \ldots, X_n)$ объема n называется набор из n независимых одинаково распределенных с.в.

Опр. Статистикой называется измеримая ф-ия от выборки, не зависящая от неизвестного параметра.

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка и $F(x)$ и $F_n(X)$ соответственно теоритическая и выборочная ФР

Опр. Выборочным моментом порядка k называется статистика $A_k(X) = A_k = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$, в частности $A_1 = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — выборочное среднее.

Опр. Центральным выборочным моментом порядка k называется статистика $M_k = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k$, в частности $M_2 = S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ — выборочная дисперсия

Свойства выборочных моментов:

1. Если $\exists\ EX_1^k$, то $EX_1^k = EA_k$
2. Если $\forall \theta \in \Theta\ \exists\ A_k$, то $A_k \xrightarrow[n \to \infty]{п.н.} EX_1^k$

Д-во: 1. $EA_k = E\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} EX_i^k = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} EX_1^k = EX_1^k$

2. Следует из УЗБЧ. $\square$

Билет №9

1. Неравенства Маркова и Чебышева.

Т. (Неравенство Маркова)

Если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, то $\forall x > 0: \; \mathbb{P}(|\xi| \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|}{x}$

Д-во: $|\xi| = |\xi| \mathbb{1}(|\xi| < x) + |\xi| \cdot \mathbb{1}(|\xi| \geq x) \geq |\xi| \cdot \mathbb{1}(|\xi| \geq x) \geq x \cdot \mathbb{1}(|\xi| \geq x)$

Тогда $\mathbb{E}|\xi| \geq \mathbb{E}[x \cdot \mathbb{1}(|\xi| \geq x)] = x \cdot \mathbb{P}(|\xi| \geq x) \Rightarrow \mathbb{P}(|\xi| \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|}{x}$ $\square$

Т. (неравенство Чебышева)

Пусть случайная величина ξ имеет конечный второй момент.

Тогда $\forall \varepsilon > 0: \; \mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathcal{D}\xi}{\varepsilon^2}$

Д-во: $\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \{\text{н-во Маркова}\} \leq \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\mathcal{D}\xi}{\varepsilon^2}$ $\square$

2. Статистическая структура. Выборка. Порядковые статистики. Вариационный ряд. Выборочная ф-ия распределения. Их свойства

Опр. Статистической структурой называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_\theta)$, где
- Ω – пространство элементарных исходов;
- $\mathcal{F}$ – з-алгебра подмножеств Ω;
- $\mathcal{P}_\theta$ – семейство вероятностных мер, параметризованное параметром: $\mathcal{P}_\theta = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m\}$;

Опр. Выборкой $X = (X_1, \ldots, X_n)$ объема n называется набор из n независимых одинаково распределенных с.в.

Опр. Статистикой называется измеримая ф-ия от выборки, не зависящая от неизвестного параметра.

Опр. Вариационный ряд – набор с.в. $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ который получается при упорядочении выборки $X = (X_1, \ldots, X_n)$ по неубыванию на каждом элементарном исходе.

Опр. $X_{(1)}(w) = \min(X_1(w), \ldots, X_n(w))$ – минимальная порядковая статистика

$X_{(n)}(w) = \max(X_1(w), \ldots, X_n(w))$ – максимальная порядковая статистика

$X_{(k)}(w)$ – k-ая порядковая статистика

Опр. Выборочной ф-ией распределения, построенной по выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ называется случайная функция $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(X_i < x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Т. Пусть $(X_1, \ldots, X_n)$ – повторная выборка значений с.в. X с ф.р. $F(x)$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}: \; \mathbb{P}(\lim\limits_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)) = 1$

Д-во: $\exists$ $Y_i = \mathbb{1}(X_i < x)$. $Y_1, \ldots, Y_n$ – н.о.р.с.в. Тогда $\mathbb{E} Y_i = \mathbb{P}(X_i < x) = F(x) < \infty$ по УЗБЧ Колмогорова: $F_n(x) = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \mathbb{E} Y_i = F(x)$ $\square$

Билет №10

1. Закон больших чисел в форме Чебышева.

Т. (ЗБЧ в форме Чебышева)
Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\mathcal{D}\xi_1 < \infty$.

Тогда $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}\xi_1$

Д-во: $\exists\, S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Rightarrow \mathbb{E}\dfrac{S_n}{n} = \mathbb{E}\xi_1$

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \{\text{н-во Чебышева}\} \leqslant \dfrac{\mathcal{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \dfrac{\frac{n\mathcal{D}\xi_1}{n^2}}{\varepsilon^2} = \dfrac{\mathcal{D}\xi_1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (т.к. $\mathcal{D}\xi_1 < \infty$)

$\Rightarrow \dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \Rightarrow \dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}\xi_1$ $\square$

2. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки.

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – выборка, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – её реализация

Если X имеет дискретное распределение, то определим ф-цию $L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$

Если же абсолютно-непрерывное распределение, то $L(x,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$, где $f(x,\theta)$ – плотность X_1

Опр. Такая ф-ия $L(x,\theta)$ называется *функцией правдоподобия*

Лемма Предположим, что $\forall \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ $\exists\ \dfrac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}, \dfrac{\partial^2 L(x,\theta)}{\partial\theta^2}$ и $\exists$ $\mathbb{E}\left|\dfrac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right| < \infty$ и $\mathbb{E}\left(\dfrac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 < \infty$

Тогда $\mathbb{E}\left(\dfrac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\right) = 0$, $\mathbb{E}\left(\dfrac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = -\mathbb{E}\dfrac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial\theta^2}$

Д-во: Проведем для абсолютно непрерывного случая.

$$\mathbb{E}\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \ln L(y,\theta)}{\partial\theta} L(y,\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(y,\theta)}{\partial\theta}\,dy = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}^n} L(y,\theta)\,dy = \frac{\partial}{\partial\theta}\{1\} = 0$$

$$\mathbb{E}\frac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial\theta^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} L\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}L}{L}\right) L\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{L\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} - \left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)^2}{L^2} L\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} - \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)^2\right\} dy = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{\mathbb{R}^n} L\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)^2 L\,dy = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(1) - \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right)^2 L\,dy = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right)^2 \quad \square$$

Опр. *Количеством информации по Фишеру*, содержащейся в выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$ называется величина $I_n(\theta) = \mathbb{E}\left(\dfrac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$

Т. (неравенство Рао-Крамера)
Предположим, что $\forall \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ $\exists\ \dfrac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}, \dfrac{\partial^2 L(x,\theta)}{\partial\theta^2}$ и $\exists$ $\mathbb{E}\left|\dfrac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right| < \infty$ и $\mathbb{E}\left(\dfrac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2$, а также $\tau(\theta)$ – дифференцируема по $\theta \in \Theta$ и для нее $\exists$ несмещенная оценка $T(X)$

Тогда: $\mathcal{D}T(X) \geqslant \dfrac{(\tau'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$, при этом равенство достигается $\Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta) = c(\theta)(T(x) - \tau(\theta))$

Д-во: т.к. $T(X)$ – несмещенная, то $\mathbb{E}T(X) = \int_{\mathbb{R}^n} T(y)L(y,\theta)\,dy = \tau(\theta)$. Продифференцируем по θ:

$$|\tau'(\theta)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} T(y)\frac{\partial L(y,\theta)}{\partial\theta}\,dy\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} T(y)\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\cdot L\,dy\right| = \left|\mathbb{E}\left(T(X)\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\right)\right| = \left|\mathbb{E}\left(T(X)\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right) - \tau(\theta)\cdot 0\right| = \{\text{лемма}\} = \left|\mathbb{E}\left(T(X)\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right) - \tau(\theta)\mathbb{E}\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right| =$$

$$= \mathbb{E}\left(T(X) - \tau(\theta)\right)\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta} - 0\right) \leqslant \{\text{Неравенство К-Б}\} \leqslant \sqrt{\mathcal{D}T(X)\cdot\mathcal{D}\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}} = \sqrt{\mathcal{D}T(X)\cdot I_n(\theta)}$$

Равенство в НКБ $\Leftrightarrow \dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta} = a T(X) + b \Rightarrow \mathbb{E}\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta} = 0 = a\tau(\theta) + b \Rightarrow b = -a\tau(\theta) \Rightarrow \dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta} = a(\theta)(T(X) - \tau(\theta))$

$\square$

Опр. *Эффективностью* оценки $T = T(X)$ – несмещенной оценки $\tau(\theta)$ называется величина $e(T) = \dfrac{(\tau'(\theta))^2}{\mathcal{D}T\cdot I_n(\theta)}$

Опр. Несмещенная оценка $T(X)$ называется *эффективной*, если $e(T) = 1$

Зам. Эффективная оценка является оптимальной, обратное, вообще говоря, неверно.

Билет №11

1. Характеристические функции и их свойства.

$\exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пр-во

Опр. *Характеристической ф-ей* случайной величины ξ называется комплекснозначная функция действительного переменного $\varphi_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ определяемая для всех $t \in \mathbb{R}$ соотношением: $\varphi_\xi(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x)$

Свойства характеристической функции:

1. $\forall$ с.в. ξ: $\varphi_\xi(0) = 1$ и $|\varphi_\xi(t)| \leq 1, \forall t$
2. $\forall$ с.в ξ и $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$
3. Если ξ и η – независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_\eta(t)$
4. $\forall$ с.в. ξ: $\varphi_\xi(t)$ – равномерно-непрерывна
5. Если $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty, k \geq 1$ то $\exists$ непрерывная $\varphi_\xi^{(k)}(t)$ и $\varphi_\xi^{(k)}(t)\big|_{t=0} = i^k \mathbb{E}\xi^k$
6. $\overline{\varphi_\xi}(t) = \varphi_\xi(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$

Д-во: 1. $\varphi_\xi(0) = \mathbb{E}e^{i\cdot 0\cdot\xi} = 1$ и $|\varphi_\xi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} dF_\xi(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{iax}| dF_\xi(x) = 1$

2. $\varphi_{a\xi+b} = \mathbb{E} e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\mathbb{E} e^{i(at)\xi} = e^{itb}\varphi_\xi(at)$

3. $\mathbb{E} e^{it(\xi+\eta)} = \mathbb{E}e^{it\xi}\cdot\mathbb{E}e^{it\eta} = \varphi_\xi(t)\cdot\varphi_\eta(t)$

4. Зафикс $\forall \varepsilon > 0$:

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{i(t+h)x} - e^{itx}) dF(x)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(e^{ihx}-1)dF(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|e^{ihx}-1|\, dF(x) = \int_{|x|\leq R}|e^{ihx}-1|\,dF(x) + \int_{|x|>R}|e^{ihx}-1|\,dF(x)$$

Выберем R так, чтобы: $\mathbb{P}(|x|>R) < \frac{\varepsilon}{4}$ и $|e^{ihx}-1| \leq 2 \Rightarrow \int_{|x|>R}|e^{ihx}-1|\,dF(x) \leq |e^{ihx}-1|\cdot\mathbb{P}(|x|>R) = \frac{\varepsilon}{2}$

Выберем h так, чтобы $|e^{ihx}-1| < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда $\int_{|x|<R}|e^{ihx}-1|\,dF_\xi(x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall |x| \leq R$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists h > 0: |\varphi(t+h) - \varphi(t)| < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}$

5. Если $\mathbb{E}\xi^k < \infty, k \geq 1$, то $\mathbb{E}\xi^m < \infty, m = \overline{1,k}$

$\Rightarrow \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(ix)^n e^{itx} dF(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|x|^m dF(x) = \mathbb{E}|\xi|^m < \infty, \forall m = \overline{1,k}$

т.е интегралы сходятся равномерно по t, значит можно:

$\varphi_\xi^{(m)}(t) = \frac{d^m}{dt}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)\right\} = i^m\int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{itx} dF(x)$

и $\varphi_\xi^{(m)}(0) = i^m\int_{-\infty}^{+\infty} x^m dF(x) = i^m\mathbb{E}\xi^m$

6. $\varphi_\xi(-t) = \mathbb{E}\cos(-t\xi) + \mathbb{E}\sin(-t\xi) = \mathbb{E}\cos(t\xi) - \mathbb{E}\sin(t\xi) = \overline{\varphi_\xi}(t)$
$= \mathbb{E}\cos(t\cdot(-\xi)) + \mathbb{E}\sin(t\cdot(-\xi)) = \varphi_{-\xi}(t)$

$\square$

Т. (Леви о непрерывном соответствии)

$\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \iff \varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_\xi(t), \forall t \in \mathbb{R}$

Д-во: без д-ва :) $\square$

2. Точечная оценка. Несмещенность, состоятельность, оптимальность. Теорема о единственности оптимальной оценки.

Опр. Оценка $T(X)$ является несмещенной оценкой параметра θ, если $\mathbb{E}_\theta T(X) = \theta$

Зам. Несмещенные оценки могут быть не единственными и могут не существовать

Опр. Оценка $T(X)$ называется состоятельной, если при неогр. увеличении объема выборки $T(X) \xrightarrow{P} \theta \quad (\mathbb{P}_\theta)$

Зам. Состоятельные оценки не единственны и могут не быть несмещенными

Опр. Оценка $T(X)$ функции $\tau(\theta)$ называется оптимальной, если: 1) она является несмещенной
2) Среди всех T_1-несмещенных оценок $\tau(\theta)$, $T(X)$ имеет наименьшую дисперсию: $\mathcal{D}T \leq \mathcal{D}T_1, \forall \theta \in \Theta$

Т. Если оптимальная оценка существует, то она единственна

Д-во: $\exists T_1$ и T_2 – оптимальные оценки $\tau(\theta) \Rightarrow$ 1) $\mathbb{E}T_1 = \mathbb{E}T_2 = \tau(\theta)$

2) $\mathcal{D}T_1 = \mathcal{D}T_2 = \delta^2 = \min\limits_{T:\mathbb{E}T=\tau(\theta)} \mathcal{D}T$

Положим $T = \frac{1}{2}(T_1+T_2)$ и $\mathcal{D}T^2 \geq \delta^2 \Rightarrow \mathcal{D}(2T) \geq 4\delta^2 \Rightarrow \mathcal{D}(T_1+T_2) = \mathcal{D}T_1 + \mathcal{D}T_2 + 2cov(T_1,T_2) \geq 4\delta^2 \Rightarrow cov(T_1,T_2) \geq \delta^2 \Rightarrow \frac{cov(T_1,T_2)}{\delta^2} = \frac{cov(T_1,T_2)}{\sqrt{\mathcal{D}T_1}\sqrt{\mathcal{D}T_2}} = \rho(T_1,T_2) \geq 1$, но $|\rho| \leq 1 \Rightarrow \rho(T_1,T_2) = 1$

$\rho(T_1,T_2) = 1 \Rightarrow T_1 \overset{п.н}{=} aT_2 + b \Rightarrow \{\mathbb{E}T_1 = \mathbb{E}T_2 = \theta\} \Rightarrow \theta = a\theta + b \Rightarrow \theta(1-a) = b \Rightarrow cov(T_1,T_2) = \mathbb{E}(T_1 - \mathbb{E}T_1)(T_2 - \mathbb{E}T_2) = \mathbb{E}(aT_2 + b - \theta)(T_2 - \theta) = \mathbb{E}(aT_2 - \theta a)(T_2 - \theta) = a\mathbb{E}(T_2-\theta)^2 = a\delta^2$

$\rho = 1 = \frac{cov(T_1,T_2)}{\sqrt{\mathcal{D}T_1}\sqrt{\mathcal{D}T_2}} = a \Rightarrow b = 0 \Rightarrow T_1 \overset{п.н.}{=} T_2$ $\square$

Билет №12.

1. Случайная величина. Порожденное и индуцированное вероятностные пространства. Функция распределения, ее свойства.

$\exists$ задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Опр. *Случайной величиной* называется действительная функция элементарного исхода $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$, обладающая свойством измеримости: $\xi^{-1}(B) \equiv \{w \mid \xi(w) \in B\} \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathbb{B}$

Утв. Пусть ξ - с.в, а $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - борелевская ф-ия.
Тогда $g(\xi)$ - с.в.

Д-во: $\exists\ \eta = g(\xi)$. Тогда $\forall B \in \mathbb{B}$: $\eta^{-1}(B) = \{w : g(\xi(w)) \in B\} = \{w : \xi(w) \in g^{-1}(B)\}$

g - борелевская $\Rightarrow g^{-1}(B) = C \in \mathbb{B} \overset{\xi - \text{с.в}}{\Rightarrow} \{w : \xi(w) \in C\} \in \mathcal{F}$ $\square$

Опр. *Распределением* случайной величины ξ называется ф-ия $P_\xi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$, определенная $\forall B \in \mathbb{B}$ по правилу: $P_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B)$

Опр. σ-алгеброй *порожденной случайной величиной* ξ называется σ-алгебра $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B), B \in \mathbb{B}\}$

Определение корректно, т.к. $\xi^{-1}(\overline{B}) = \overline{\xi^{-1}(B)}$ и $\xi^{-1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_i) \Rightarrow \mathcal{F}_\xi$ - σ-алгебра, причем $\mathcal{F}_\xi \subset \mathcal{F}$

Опр. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}_\xi, \mathbb{P})$ называется *порожденным случайной величиной* ξ.

Опр. Вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, P_\xi)$ называется *индуцированным случайной величиной* ξ.

Опр. *Функцией распределения* случайной величины ξ называется отображение $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определенное по правилу: $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$ или $F_\xi(x) = P_\xi((-\infty, x)), \forall x \in \mathbb{R}$

Т. $F_\xi(x)$ однозначно определяет $P_\xi(B)$

Д-во: $\forall$ борелевское множество может быть представлено в виде разности числовой оси, 1 или 2 полупрямых и не более чем счетного объединения отрезков.

В силу того, что $P_\xi((-\infty, a)) = F_\xi(a)$, $P_\xi([b, +\infty)) = 1 - F_\xi(b)$,

$P_\xi([a, b)) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$ $\Rightarrow$ утверждение т. справедливо $\square$

Свойства:

1. Если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$ (неубывание)
2. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$ (непр-ть слева)
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \infty$

Д-во:

1. $x_1 < x_2 \Rightarrow \{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \Rightarrow \mathbb{P}(\xi < x_1) \le \mathbb{P}(\xi < x_2) \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$
2. $* \ F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(\xi < x_0) - \mathbb{P}(\xi < x_0 - \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(x_0 - \frac{1}{n} \le \xi < x_0)$

   $*\{B_n\}: B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \le \xi < x_0\}$, $B_{n+1} \subset B_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{n} B_k = B_n$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k = \varnothing$

   В силу непр-ти вероятности $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k\right) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \Rightarrow F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$
3. $*\{B_n\}: B_n = \{\xi < -n\}$, $B_{n+1} \subset B_n, \forall n$, $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} B_n = \varnothing$

   $\Rightarrow F_\xi(-n) = \mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

   Для $F(+\infty) = 1$ - аналогично. $\square$

2. Функция правдоподобия. Достаточные и полные статистики. Теорема факторизации.

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ - выборка, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ - её реализация

Если X имеет дискретное распределение, то определим ф-цию $L(x, \theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$

Если же абсолютно-непрерывное распределение, то $L(x, \theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$, где $f(x, \theta)$ - плотность X_1

Опр. Такая ф-ия $L(x, \theta)$ называется *функцией правдоподобия*

Опр. Статистика $T = T(X)$ называется *достаточной для модели* $\mathcal{F} = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$, если распределение выборки $X = (X_1, \ldots, X_n)$ не зависит от θ при условии $T(X) = t$.

Опр. Достаточная статистика $T(X)$ называется *полной*, если $\forall$ ф-ии $\varphi(z)$: из р-ва $\mathbb{E}_\theta \varphi(T(X)) = 0, \forall \theta \in \Theta$ следует, что $\varphi(T) \overset{\text{п.н.}}{=} 0$

Т. (Критерий факторизации)

$T(X)$ - достаточная статистика $\Leftrightarrow$ функция правдоподобия может быть представлена в виде: $L(x, \theta) = g(T(x), \theta) h(x)$

Д-во: Проведем доказательство для дискретного случая.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $T(X)$ - достаточная статистика. Если $T(x) = t$, то событие $\{X = x\} \subseteq \{T(X) = t\}$. Поэтому:

$$L(x, \theta) = \mathbb{P}_\theta(X = x) = \mathbb{P}_\theta(X = x, T(X) = t) = \underbrace{\mathbb{P}_\theta(T(X) = t)}_{g(T(X), \theta)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}_\theta(X = x \mid T(X) = t)}_{h(x, t)}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $L(x, \theta) = g(T(x), \theta) h(x)$. Тогда если $x : T(x) = t$, то

$$\mathbb{P}(X = x \mid T(X) = t) = \frac{\mathbb{P}(X = x, T(X) = t)}{\mathbb{P}(T(X) = t)} = \frac{\mathbb{P}(X = x)}{\sum\limits_{x' : T(x') = t} \mathbb{P}(X = x')} = \frac{g(T(x), \theta) h(x)}{\sum\limits_{x' : T(x') = t} g(T(x'), \theta) h(x')} = \frac{g(t, \theta) h(x)}{\sum\limits_{x' : T(x') = t} g(t, \theta) h(x')} = \frac{h(x)}{\sum\limits_{x' : T(x') = t} h(x')}$$

$\Rightarrow$ условное мат ожидание не зависит от $\theta \Rightarrow T(X)$ - достаточная $\square$

Билет №13

1. Дискретные, сингулярные и абсолютно непрерывные ф-ии расп-ия. Плотность распределения. Т. Лебега о разложении ф-ии расп-ия.

Опр. Случайная величина ξ называется **дискретной**, если $\exists$ не более чем счётное множество B: $P_\xi(B)=1$.

Дискретная ф-ия распределения имеет вид: $F_\xi(x)=\mathbb{P}(\xi<x)=\sum\limits_{x_i<x}\mathbb{P}(\xi=x_i)$, где x_i - возможные частные значения с.в. ξ.

Опр. Распределение P_ξ случайной величины ξ называется **абсолютно непрерывным**, если $\exists f(x)\geqslant 0$:

$P_\xi(B)=\int\limits_B f(x)\lambda(dx)$, где:
- $f(x)$ – плотность распределения
- λ – мера Лебега

Ф-ия распределения $F_\xi(x)=P_\xi((-\infty;x))=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)\lambda(dt)$

Свойства плотности:

1. $f_\xi(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$ почти всюду (кроме, быть может, множеств меры нуль по Лебегу)
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(t)dt=1$

Д-во:

1. Очев (из свойств ИЗП)
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(t)dt=P_\xi(\mathbb{R})=\mathbb{P}(\xi\in\mathbb{R})=1$ □

Опр. Точка x называется **точкой роста** ф-ии $F(x)$, если:
$\forall$ достаточно малого $\varepsilon>0$ в некоторой окр-ти (радиуса, большего, чем ε) точки x выполнено н-во: $F(x+\varepsilon)-F(x-\varepsilon)>0$

Опр. Распределение P_ξ называется **сингулярным**, если соотв. ф-ия распределения является непрерывной, но мн-во точек роста данной ф-ии имеет меру Лебега нуль.

Т. (Лебега)
$\forall$ ф-ия распределения $F(x)$ м.б. представлена в виде:
$F(x)=p_1F_1(x)+p_2F_2(x)+p_3F_3(x)$, где
- $p_i\geqslant 0$, $i=1,2,3$
- $p_1+p_2+p_3=1$
- $F_1(x)$ – дискретная ФР
- $F_2(x)$ - абс. непр. ФР
- $F_3(x)$ - сингулярная ФР

2. Теорема Рао - Блекуэлла - Колмогорова

Т. (Рао - Блекуэлла - Колмогорова)

Если оптимальная оценка существует, то она является функцией от достаточной статистики.

Д-во:

Вспомним св-ва условного мат ожидания: ① $\mathbb{E}f(X,Y)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(f(X,Y)|Y))$ и ② $\mathbb{E}(g(X)|X)=g(X)$

Пусть $T(X)$ - достаточная статистика и $T_1(X)$ - несмещенная оценка для $\tau(\theta)$, т.е: $\mathbb{E}T_1(X)=\tau(\theta)$

Рассм. ф-ию $H(T)=\mathbb{E}(T_1|T)$, тогда из ① $\Rightarrow$ $\mathbb{E}H(T)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(T_1|T))=\mathbb{E}T_1=\tau(\theta)$ $\Rightarrow$ $H(T)$ - несмещенная оценка для $\tau(\theta)$

$*$ $\mathbb{E}\{(T_1-H(T))(H(T)-\tau(\theta))\}=-\tau(\theta)\underbrace{\mathbb{E}(T_1-H(T))}_{\mathbb{E}T_1-\mathbb{E}H(T)=0}+\mathbb{E}H(T)(T_1-H(T))=\mathbb{E}H(T)(T_1-H(T))=$ ① $=\mathbb{E}\{\mathbb{E}(H(T)(T_1-H(T))|T)\}=\{T\text{ - фикс}\Rightarrow H(T)\sim const\}=\mathbb{E}(H(T)\underbrace{\mathbb{E}(T_1-H(T)|T)}_{\mathbb{E}(T_1|T)-H(T)=H(T)-H(T)=0})$

Тогда $D(T_1)=\mathbb{E}(T_1-\mathbb{E}T_1)^2=\mathbb{E}(T_1-\tau(\theta))^2=\mathbb{E}(T_1-H(T)+H(T)-\tau(\theta))^2=\mathbb{E}(T_1-H(T))^2+\mathbb{E}(H(T)-\tau(\theta))^2+2\underbrace{\mathbb{E}(T_1-H(T))(H(T)-\tau(\theta))}_{0}=\mathbb{E}(T_1-H(T))^2+DH(T)\geqslant DH(T)$

$\Rightarrow H(T)$ - несмещенная оценка с минимальной (среди всех несм. оценок) дисперсией $\Rightarrow H(T)$ - оптимальная □

Билет №14.

1. Моменты случайных величин. Их свойства.

$\exists$ задано вер-ое пр-во $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и с.в. ξ на нем.

Опр. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется число $E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$. Если интеграл расходится, то говорят, что мат. ожидание не существует.

Опр. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется число $E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_\xi(x)$, где $F_\xi(x)$ – ф.р. с.в. ξ. Если интеграл расходится, то говорят, что мат. ожидание не существует.

Свойства мат. ожидания:

1. $\forall$ действительной борелевской ф-ии $g(x)$: $\mathbb{E}g(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF_\xi(x)$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(a\xi + b) = a\mathbb{E}\xi + b$
3. $\mathbb{E}(\xi+\eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, если $\exists$ любые два из этих мат. ожиданий
4. Если $\mathbb{P}(a \leq \xi \leq b) = 1$, то $a \leq \mathbb{E}\xi \leq b$
5. Если $\xi \geq 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi \overset{\text{п.н.}}{=} 0$
6. $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$
7. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\mathbb{1}_A$, где $\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$
8. Если ξ и η – независ., то $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$

Д-во:

1. $\forall$ с.в. $\eta = g(\xi)$, $\mathbb{E}\eta = \int\limits_{\Omega} \eta(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{\Omega} g(\xi(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega)$. Откуда и вытекает формула замены переменной
2. $\mathbb{E}(a\xi + b) = \int\limits_{\Omega}(a\xi(\omega)+b)\,\mathbb{P}(d\omega) = a\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) + b\int\limits_{\Omega}\mathbb{P}(d\omega) = a\mathbb{E}\xi + b$
3. $\mathbb{E}(\xi+\eta) = \int\limits_{\Omega}(\xi(\omega)+\eta(\omega))\,\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) + \int\limits_{\Omega}\eta(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$
4. $\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)$, $\quad a = \int\limits_{\Omega} a\,\mathbb{P}(d\omega) \leq \int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) \leq \int\limits_{\Omega} b\,\mathbb{P}(d\omega) = b$
5. $\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) = 0$, если бы $\xi \overset{\text{п.н.}}{\neq} 0$, то $\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega) > 0$ – противоречие.
6. $|\mathbb{E}\xi| = \left|\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)\,\mathbb{P}(d\omega)\right| \leq \int\limits_{\Omega}|\xi(\omega)|\,\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}|\xi|$
7. $\mathbb{P}(A) = 1\cdot\mathbb{P}(A) + 0\cdot\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{E}\mathbb{1}_A$
8. с.в. независимы $\Rightarrow F_{\xi\eta} = F_\xi F_\eta \Rightarrow \mathbb{E}(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\, dF_{\xi\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\, dF_\xi\, dF_\eta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dF_\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, dF_\eta = \mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta$ $\square$

Опр. *Дисперсией* с.в. ξ называется число $\mathcal{D}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$

Утв. Если $\exists$ момент порядка $t > 0$ с.в. ξ, то существует и ее момент порядка $0 < s < t$.

Д-во: $|\xi|^s \leq |\xi|^t + 1 \Rightarrow \mathbb{E}|\xi|^s \leq \mathbb{E}|\xi|^t + 1 < \infty$ $\square$

Свойства Дисперсии:

1. $\mathcal{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$
2. $\mathcal{D}\xi \geq 0$, $\quad \mathcal{D}\xi = 0 \Leftrightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} \text{const}$
3. $\mathcal{D}(a + b\xi) = b^2\mathcal{D}\xi$, $a, b \in \mathbb{R}$
4. Если ξ и η – независимые с.в, то $\mathcal{D}(\xi+\eta) = \mathcal{D}\xi + \mathcal{D}\eta$

Д-во:

1. $\mathcal{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2(\mathbb{E}\xi)^2 + (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$
2. $\mathcal{D} = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq \{(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geq 0\} \geq 0$
   $\mathcal{D}\xi = 0 \Rightarrow (\xi - \mathbb{E}\xi) \overset{\text{п.н.}}{=} 0 \Rightarrow \xi \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbb{E}\xi = \text{const}$
   $\xi \overset{\text{п.н.}}{=} a \Rightarrow \mathcal{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}(a-a)^2 = 0$
3. $\mathcal{D}(a + b\xi) = \mathbb{E}((a+b\xi) - a - b\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}(b(\xi - \mathbb{E}\xi))^2 = b^2\mathcal{D}\xi$
4. $\mathcal{D}(\xi+\eta) = \mathbb{E}(\xi+\eta)^2 - (\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}\xi\eta + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - (\mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = \mathcal{D}\xi + \mathcal{D}\eta$ $\square$

2. Проверка гипотез. Лемма Неймана–Пирсона.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – повторная выборка, $\theta \in \Theta$ и имеем 2 простые гипотезы: $H_0: \theta = \theta_0$; $H_1: \theta = \theta_1$; Пусть $L(y;\theta)$ – ф-ия правдоподобия, $L_0(y) = L(y;\theta_0)$, $L_1(y) = L(y;\theta_1)$

Отношением правдоподобия называется величина $\dfrac{L_1(y)}{L_0(y)}$

Лемма (Неймана–Пирсона)

Для $\forall\alpha \in [0,1]$ $\exists$ постоянные $c > 0$ и $\varepsilon \in [0,1]$ такие, что φ-критерий: $\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & L_1(y) > cL_0(y) \\ \varepsilon, & L_1(y) = cL_0(y) \\ 0, & L_1(y) < cL_0(y) \end{cases}$ является оптимальным критерием, т.е. наиболее мощным среди всех φ-критериев значимости α.

Д-во: c и ε

Введем ф-ию $g(c) = \mathbb{P}(L_1(Y) \geq cL_0(Y) \mid H_0)$

Тогда $1 - g(c) = \mathbb{P}(L_1(Y) < L_0(Y) \mid H_0) = \mathbb{P}\left(\frac{p_1(Y)}{p_0(Y)} < c \mid H_0\right)$ – ф-ия распределения $\Rightarrow$

$g(c)$: 1) не возрастает; 2) непрерывна слева; 3) $g(0) = 1$; $g(+\infty) = 0$

По заданному α определим c_α из выражений:

$c_\alpha: \begin{cases} g(c_\alpha + 0) < \alpha \leq g(c_\alpha), & \text{если } c_\alpha \text{ – т. разрыва } g(c) \\ \alpha = g(c_\alpha), & \text{иначе} \end{cases}$

Для $g(c)$ возможны 3 случая:

1. $g(c)$ имеет разрыв в т. "пересечения" с $y = \alpha \Rightarrow$ в нек. т. c_0: $g(c_0) > \alpha > g(c_0+0)$, Тогда $c_\alpha = c_0$
2. $g(c)$ непрерывна и значение равное α достигается в $!$ т. c_0, тогда $c_\alpha = c_0$
3. $g(c)$ непрерывна и з-ие равное α достигается на $[c_1, c_2]$, тогда берем $\forall c_0 \in [c_1, c_2]$ и $c_\alpha = c_0$

c_α определенное таким образом есть искомое c из $\varphi^*(y)$

ε определим сл. образом:

- в случаях 2 и 3 $\varepsilon = 0$
- в случае 1 получим $\varepsilon = \dfrac{\alpha - g(c_\alpha + 0)}{g(c_\alpha) - g(c_\alpha + 0)}$

Оптимальность и α

Ф-ия плотности $W(\varphi;\theta_0)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi^*(y)L_0(y)dy=\int\limits_{L_1>c\cdot L_0}L_0(y)dy+\varepsilon\int\limits_{L_1=c\cdot L_0}L_0(y)dy+0=\int\limits_{L_1>c\cdot L_0}L_0(y)dy+\int\limits_{L_1=c\cdot L_0}L_0(y)dy+(\varepsilon-1)\int\limits_{L_1=c\cdot L_0}L_0(y)dy=\int\limits_{L_1\geqslant c\cdot L_0}L_0(y)dy+(\varepsilon-1)\int\limits_{L_1=c\cdot L_0}L_0(y)dy=\mathbb{P}_{\theta_0}(L_1(y)\geq c\cdot L_0(y))+(\varepsilon-1)\mathbb{P}_{\theta_0}(L_1(y)=c\cdot L_0(y))=$

$=g(c_\alpha)+(\varepsilon-1)(g(c_\alpha)-g(c_\alpha+0))=\left\{\varepsilon-1=\frac{\alpha-g(c_\alpha)}{g(c_\alpha)-g(c_\alpha+0)}\right\}=\begin{cases} g(c_\alpha)+\alpha-g(c_\alpha), & \text{для } ①\\ g(c_\alpha+0), & \text{для } ② \text{ и } ③\end{cases}=\{g(c_\alpha+0)=g(c_\alpha) \text{ для } ② \text{ и } ③\}=\alpha\Rightarrow\varphi^*$-крит. имеет уровень значимости α

Пусть $\forall\varphi$-крит. имеет ур. з. α, докажем, что $W(\varphi^*,\theta_1)\geqslant W(\varphi,\theta_1)$:

$*$ $I=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\varphi^*(y)-\varphi(y))(L_1(y)-c_\alpha L_0(y))dy=\int\limits_{\varphi^*>\varphi}\ldots dy+\int\limits_{\varphi^*<\varphi}\ldots dy=I_1+I_2$

I_1: $\varphi^*(y)>\varphi(y)>0\Rightarrow\varphi^*(y)>0\Leftrightarrow L_1(y)\geqslant c_\alpha L_0(y)\Rightarrow I_1\geqslant 0$

I_2: $\varphi^*(y)<\varphi(y)\leq 1\Rightarrow\varphi^*(y)<1\Leftrightarrow L_1(y)\leq c_\alpha L_0(y)\Rightarrow I_2\geqslant 0$

$\Rightarrow 0\leq I=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi^*(y)L_1(y)dy-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)L_1(y)dy-c_\alpha\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi^*(y)L_0(y)dy-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)L_0(y)dy\right)=W(\varphi^*,\theta_1)-W(\varphi,\theta_1)-c_\alpha(\underbrace{W(\varphi^*,\theta_0)}_{\alpha}-\underbrace{W(\varphi,\theta_0)}_{\alpha})=W(\varphi^*,\theta_1)-W(\varphi,\theta_1)$

$\Rightarrow W(\varphi^*,\theta_1)\geqslant W(\varphi,\theta_1)$ $\square$

Билет №15

1. Условное математическое ожидание

Для дискретных с.в.:

$\exists$ X, Y – дискретные с.в и $X: \begin{matrix} a_1, \dots, a_k \\ p_1, \dots, p_k \end{matrix}$, а $Y: \begin{matrix} b_1, \dots, b_m \\ q_1, \dots, q_m \end{matrix}$

Опр. Условным математическим ожиданием с.в. X при условии $Y = b_i$ называется число $E(X \mid Y = b_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathbb{P}(X = a_j \mid Y = b_i)$

Опр. Условным математическим ожиданием $\mathbb{E}(X|Y)$ с.в. X относительно с.в. Y называется случайная величина $E(X|Y)$: $\begin{matrix} E(X \mid Y = b_i) \\ \mathbb{P}(Y = b_i) \end{matrix}$, $i = \overline{1, m}$ и определяется как отображение следующего вида: $\forall \omega \in Y^{-1}(b_i) \in \mathcal{F} \to g(Y(\omega)) = E(X \mid Y = b_i)$

Для абсолютно непрерывных с.в.:

$\exists$ (X, Y) – с.вектор с плотностью $f(x,y)$, причем $f(x,y) \in C(\mathbb{R}^2)$ и предположим, что $\forall$ дост. малого $\varepsilon > 0$ выполнено $P(-\varepsilon < Y - y_0 < \varepsilon) > 0$

Плотность с.в. Y: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ и $f_Y(y_0) > 0$

$\ast$ $\forall u \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X < u \mid Y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)) = \frac{\mathbb{P}(X < u, Y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))}{\mathbb{P}(Y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))} = \frac{\int_{-\infty}^{u} \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy}{\int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} f_Y(y)\,dy} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{Т. о ср.}} \frac{\int_{-\infty}^{u} f(x, y_0)\,dx}{f_Y(y_0)} = \int_{-\infty}^{u} \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}\,dx$$

Опр. Условной плотностью с.в. X при условии $Y = y_0$ называется величина равная $\begin{cases} \dfrac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}, & f_Y(y_0) > 0 \\ 0, & f_Y(y_0) = 0 \end{cases}$

Опр. Условным мат. ожиданием с.в. X при фиксированном значении с.в. Y называется величина $E(X \mid Y = y_0) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x \dfrac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}\,dx, & \text{если } f_Y(y_0) > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Опр. Условным мат. ожиданием с.в X. относительно с.в. Y н-ся с.в. $g(Y)$: $g(Y)(\omega) = g(Y(\omega)) = E(X \mid Y(\omega))$

Утв. $\forall$ ограниченной борелевской ф-ии $h(y)$: $E\,h(Y)X = E\,h(Y)g(Y)$, где $g(Y) = E(X|Y)$

Д-во: $E h(Y) g(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) g(y) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f_Y(y)\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot h(y) \cdot f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} x h(y)\,dF(x,y) = E X h(Y)$ $\square$

2. Оптимальность оценок, являющихся функциями полной достаточной статистики

Т. (Колмогорова)

Если $T(X)$ – полная достаточная статистика, то она является оптимальной оценкой своего математического ожидания.

Д-во:

Пусть $T_1(X)$ – о.о. $\mathbb{E}T$, тогда по т. Р-Б-К $T_1(X)$ – ф-ия от достаточной статистики $T(X)$, т.е $T_1 = H(T)$ и $\mathbb{E}T = \mathbb{E}T_1 \Rightarrow \mathbb{E}T - \mathbb{E}H(T) = \mathbb{E}\underbrace{(T - H(T))}_{\varphi(T)} = 0 \Rightarrow \{T(X)\text{ – полная}\} \Rightarrow T \overset{\text{п.н.}}{=} H(T) = T_1 \Rightarrow T$ – о.о. ET $\square$

Билет № 16

1. Совокупности случайных величин. Совместная ф-ия распределения. Распределение функций от случайных величин.

$\exists (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство и $\xi_1, \dots, \xi_n$ – случайные величины на нём, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – случайный вектор.

Опр. Функция $P_\xi : \mathbb{B}_n \to \mathbb{R}$ определенная по следующему закону:

$\forall B \in \mathbb{B}_n : P_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(w \mid (\xi_1(w), \dots, \xi_n(w)) \in B)$, где $\mathbb{B}_n$ – борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathbb{R}^n$

называется совместным распределением случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Опр. Определенная $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ф-ия $F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n)$ называется совместной функцией распределения с.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Опр. Если $\exists$ неотрицательная ф-ия $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\forall B \in \mathbb{B}_n$:

$\mathbb{P}(\xi \in B) = \int_B f(x)dx = \int\int_B \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$, то соответствующее распределение называется абсолютно непрерывным, а ф-ия $f(x)$ – совместной плотностью случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$

Зам. Для ф-ии совместного распределения выполняются свойства монотонности и непрерывности слева по каждой переменной.

При этом маргинальные ф-ии распределения: $F_i(x) = \lim\limits_{\substack{x_k \to +\infty \\ i \neq k}} F(x_1, \dots, x_n)$

T. (Формула свёртки)

Если случайные величины ξ и η – независимы и имеют абсолютно непрерывные распределения с плотностями $f_\xi(u)$ и $f_\eta(u)$, то плотность распределения суммы $\xi + \eta$ существует и равна "свёртке" плотностей f_ξ и f_η: $f_{\xi+\eta}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u) f_\eta(t-u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(u) f_\xi(t-u)\,du$

Д-во:

$\exists$ $g(u,v) = u + v$ и $\mathcal{D} = \{(u,v) : g(u,v) < x\} = \{(u,v) : u < x - v\} = \{(u,v) : v < x - u\}$. Тогда $F_{\xi+\eta}(x) = \iint\limits_{\mathcal{D}} f_\xi(u) f_\eta(v)\,du\,dv = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{x-u} f_\xi(u) f_\eta(v)\,dv \Big) du = \{ v = t - u \} =$

$= \{ v \in (-\infty, x-u) \Leftrightarrow t \in (-\infty, x) \} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u) f_\eta(t-u)\,dt \Big) du = \int\limits_{-\infty}^{x} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) f_\eta(t-u)\,du \Big) dt$, откуда и выражается плотность. Аналогично вторая формула $\square$

2. Доверительные интервалы. Метод использования центральной статистики

Опр. Пусть $Y = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка. Доверительным интервалом для θ с коэффициентом доверия γ называется интервал $(T_1(Y), T_2(Y))$: $\mathbb{P}(T_1(Y) < \theta < T_2(Y)) \geq \gamma$, где $T_1(Y) \overset{\text{п.н.}}{\leq} T_2(Y)$ – статистики

Пусть $Y = (X_1, \dots, X_n)$ – выборка

Опр. Функция $G(Y, \theta)$ называется центральной статистикой, если:

1) $G(Y, \theta)$ – непрерывна и строго монотонна по θ при $\forall$ фиксированной реализации выборки y

2) Распределение G : $F_G(t) = \mathbb{P}_\theta(G(X, \theta) < t)$ – непрерывна и не зависит от θ.

С помощью центральной статистики доверительный интервал строится следующим образом:

1. Фиксируются $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}_\theta(t_1 \leq G(X, \theta) \leq t_2) = \gamma, \forall \theta \in \Theta \iff F_G(t_2 + 0) - F_G(t_1) = \gamma$

2. Пусть для определенности $G(X, \theta)$ возрастает по θ. Тогда $\exists$ $G^{-1}(X, t)$:

Из условий $\begin{cases} G(X, \theta) \leq t_2 \\ G(X, \theta) \geq t_1 \end{cases}$ находятся статистики: $\begin{cases} T_2(X) : G(X, T_2(X)) = t_2 \\ T_1(X) : G(X, T_1(X)) = t_1 \end{cases}$ $\iff$ $T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)$

Тогда $\mathbb{P}_\theta(T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) \geq \gamma, \forall \theta \in \Theta$

3. Минимизируем длину интервала: $|G^{-1}(X, t_2) - G^{-1}(X, t_1)| = |T_2(X) - T_1(X)| \longrightarrow \min$ при условии $F_G(t_2 + 0) - F_G(t_1) = \gamma$

Билет №17.

1. Независимость случайных величин. Критерии независимости.

Опр. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются (стохастически) независимыми, если для всех $B_i \in \mathcal{B}, i=\overline{1,n}$: $\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = \mathbb{P}(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi_n \in B_n)$

Т. (критерий независимости)

Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы $\Leftrightarrow$ их совместная ф-ия распределения представима в виде произведения маргинальных ф-ий распределения:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$$

В частности: · в дискретном случае: $\mathbb{P}(\xi_1 = a_1, \dots, \xi_n = a_n) = \mathbb{P}(\xi = a_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi = a_n), \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

· в абс.-непрерывном случае: $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$

2. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки.

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — её реализация

Если X имеет дискретное распределение, то определим ф-ию $L(x,\theta) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$

Если же абсолютно-непрерывное распределение, то $L(x,\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$, где $f(x,\theta)$ — плотность X_1

Опр. Такая ф-ия $L(x,\theta)$ называется функцией правдоподобия

Лемма Предположим, что $\forall \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ $\exists \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 L(x,\theta)}{\partial \theta^2}$ и $\exists$ $\mathbb{E}\left|\frac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right| < \infty$ и $\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2$.

Тогда $\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta}\right) = 0$, $\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = -\mathbb{E}\frac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial \theta^2}$

Д-во: Проведем для абсолютно непрерывного случая.

$L(x,\theta)$ - совместная плотность $X \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} L(y,\theta)dy = 1$, $y = (x_1, \dots, x_n)$, дифференцируя по θ получим: $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial L(y,\theta)}{\partial \theta} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L(y,\theta)} \frac{\partial L(y,\theta)}{\partial \theta} L(y,\theta) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \ln L(y,\theta)}{\partial \theta} L(y,\theta) dy = \mathbb{E}\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} = 0$

$$\mathbb{E}\frac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial \theta^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} L\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} L}{L}\right) L dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{L \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2}{L^2} L dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} - \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2\right\} dy = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_{\mathbb{R}^n} L dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)^2 L dy = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(1) - \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2 L dy = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2 \quad \square$$

Опр. Количество информации по Фишеру, содержащейся в выборке $X = (X_1, \dots, X_n)$ называется величина $I_n(\theta) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2$

Т. (неравенство Рао-Крамера)

Предположим, что $\forall \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ $\exists \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 L(x,\theta)}{\partial \theta^2}$ и $\exists$ $\mathbb{E}\left|\frac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right| < \infty$ и $\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2$, а также $\tau(\theta)$ - дифференцируема по $\theta \in \Theta$ и для нее $\exists$ несмещенная оценка $T(X)$

Тогда: $\mathbb{D}T(X) \geqslant \frac{(\tau'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$, при этом равенство достигается $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x,\theta) = c(\theta)(T(x) - \tau(\theta))$

Д-во: т.к. $T(X)$ - несмещенная, то $\mathbb{E}T(X) = \int_{\mathbb{R}^n} T(y) L(y,\theta) dy = \tau(\theta)$. Продифференцируем по θ:

$$|\tau'(\theta)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} T(y) \frac{\partial L(y,\theta)}{\partial \theta} dy\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} T(y) \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \cdot L \cdot dy\right| = \left|\mathbb{E}\left(T(X) \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta}\right)\right| = \left|\mathbb{E}\left(T(X)\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right) - \tau(\theta) \cdot 0\right| = \{\text{Лемма}\} = \left|\mathbb{E}\left(T(X)\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right) - \tau(\theta)\mathbb{E}\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right| =$$

$$= \mathbb{E}\left(T(X) - \tau(\theta)\right)\left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} - 0\right) \leqslant \{\text{Неравенство К-Б}\} \leqslant \sqrt{\mathbb{D}T(X) \cdot \mathbb{D}\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}} = \sqrt{\mathbb{D}T(X) \cdot I_n(\theta)}$$

Равенство в НКБ $\Leftrightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = aT(X) + b \Rightarrow \mathbb{E}\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 = a\tau(\theta) + b \Rightarrow b = -a\tau(\theta) \Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = a(\theta)(T(X) - \tau(\theta))$

$\square$

Опр. Эффективностью оценки $T = T(X)$ - несмещенной оценки $\tau(\theta)$ называется величина $e(T) = \frac{(\tau'(\theta))^2}{\mathbb{D}T \cdot I_n(\theta)}$

Опр. Несмещенная оценка $T(X)$ называется эффективной, если $e(T) = 1$

Зам. Эффективная оценка является оптимальной, обратное, вообще говоря, неверно.

Билет №18.

1. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин.

Т. (УЗБЧ в ф. Колмогорова)

Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными мат. ожиданиями.
Тогда выполняется УЗБЧ: $\dfrac{\sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i}{n} \xrightarrow{п.н.} 0$ при $n\to\infty$

Д-во:

$\exists\, \xi'_n$: $\xi'_n = \begin{cases} \xi_n, & |\xi_n| \le n \\ 0, & |\xi_n| > n \end{cases}$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

Очевидно, все ξ'_n – независимы и $\mathbb{E}|\xi|^k < C^k$; $|\xi| \overset{п.в.}{<} C$

Обозначим $\xi''_n = \xi_n - \xi'_n$, $\xi_n = \xi'_n + \xi''_n$, $S_n = S'_n + S''_n$, где $S'_n = \sum_{i=1}^n \xi'_i$, $S''_n = \sum_{i=1}^n \xi''_i$

Тогда $\dfrac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} = \dfrac{S'_n + S''_n - \mathbb{E}S'_n + \mathbb{E}S'_n - \mathbb{E}S_n}{n} = \dfrac{S'_n - \mathbb{E}S'_n}{n} + \dfrac{S''_n}{n} + \dfrac{\mathbb{E}S'_n - \mathbb{E}S_n}{n}$

Рассмотрим событие, $B_n = \{\xi''_n \ne 0\}$.

т.к. $\xi''_n = \xi_n - \xi'_n$, $\Rightarrow \{\xi''_n \ne 0\} \Leftrightarrow \{\xi_n \ne \xi'_n\} \Leftrightarrow \{|\xi'_n| = 0\} \Leftrightarrow \{|\xi_n| > n\}$

Поэтому $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\xi''_n \ne 0) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|\xi_n| > n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|\xi_1| > n) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{m=n}^\infty \mathbb{P}(m < |\xi_1| \le m+1) = \{$ слагаемое $\mathbb{P}(m < |\xi_1| \le m+1)$ входит m раз$\} = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^m \mathbb{P}(m < |\xi_1| \le m+1) = \sum_{m=1}^\infty m\, \mathbb{P}(m < |\xi_1| \le m+1) \le \int_\Omega |\xi_1(\omega)|\, \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}|\xi_1| < \infty$

Тогда согласно лемме Бореля–Кантелли, $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(\xi''_n \ne 0) < \infty \Rightarrow \dfrac{S''_n}{n} \xrightarrow{п.н.} 0$, при $n \to \infty$ (1)

Докажем что для ξ'_n выполняется УЗБЧ: $\mathcal{D}\xi'_n \le \mathbb{E}\xi'^2_n$

Пусть $F(x) = \mathbb{P}(\xi_n < x)$, $\mathcal{D}\xi'_n \le \mathbb{E}\xi'^2_n = \int_{-n}^{n} x^2\, dF(x)$

Тогда $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\mathcal{D}\xi'_n}{n^2} \le \sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^2} \int_{-n}^{n} x^2\, dF(x) = \sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k<|x|\le k+1} x^2\, dF(x) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=k}^\infty \dfrac{1}{n^2} \cdot \int_{k-1<|x|\le k} x^2\, dF(x)$

т.к. $\sum_{n=k}^\infty \dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{C}{k}$, $x^2 \le k\cdot|x|$, то

$\sum_{k=1}^\infty \sum_{n=k}^\infty \dfrac{1}{n^2} \int_{k-1<|x|\le k} x^2\, dF(x) \le C \sum_{k=1}^\infty \dfrac{1}{k} \cdot k \int_{k-1<|x|\le k} |x|\, dF(x) = C \int_0^{+\infty} |x|\, dF(x) = C\,\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$

$\Rightarrow \xi'_n$ – удовл. УЗБЧ $\Rightarrow \dfrac{S'_n - \mathbb{E}S'_n}{n} \xrightarrow{п.н.} 0$ (2)

$\dfrac{\mathbb{E}S'_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}\dfrac{(\xi'_1 - \xi_1) + \dots + (\xi'_n - \xi_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow -\mathbb{E}\dfrac{\xi''_1 + \dots + \xi''_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow -\mathbb{E}\dfrac{S''_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ – верно (т.к. из $\dfrac{S''_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} 0 \Rightarrow \dfrac{S''_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(1)} 0$) (3)

$\dfrac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} = (1)+(2)+(3) \xrightarrow{п.н.} 0$ при $n\to\infty$ $\square$

2. Точечная оценка. Несмещенность, состоятельность, оптимальность. Теорема о единственности оптимальной оценки.

Опр. Оценка $T(X)$ является несмещенной оценкой параметра θ, если $\mathbb{E}_\theta T(X) = \theta$

Зам. Несмещенные оценки могут быть не единственными и могут не существовать

Опр. Оценка $T(X)$ называется **состоятельной**, если при неогр. увеличении объема выборки $T(X) \xrightarrow{P} \theta$ $(\mathbb{P}_\theta)$

Зам. Состоятельные оценки не единственны и могут не быть несмещенными

Опр. Оценка $T(X)$ функции $\tau(\theta)$ называется оптимальной, если: 1) она является несмещенной
2) среди всех T_1-несмещенных оценок $\tau(\theta)$, $T(X)$ имеет наименьшую дисперсию: $\mathcal{D}T \le \mathcal{D}T_1$, $\forall \theta \in \Theta$

Т. Если оптимальная оценка существует, то она единственна

Д-во: $\exists\, T_1$ и T_2 – оптимальные оценки $\theta \Rightarrow$ 1) $\mathbb{E}T_1 = \mathbb{E}T_2 = \theta$

2) $\mathcal{D}T_1 = \mathcal{D}T_2 = \sigma^2 = \min\limits_{T:\,\mathbb{E}T = \tau(\theta)} \mathcal{D}T$

Положим $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ и $\mathcal{D}T^2 \ge \sigma^2 \Rightarrow \mathcal{D}(2T) \ge 4\sigma^2 \Rightarrow \mathcal{D}(T_1 + T_2) = \mathcal{D}T_1 + \mathcal{D}T_2 + 2\,cov(T_1,T_2) \ge 4\sigma^2 \Rightarrow cov(T_1,T_2) \ge \sigma^2 \Rightarrow \dfrac{cov(T_1,T_2)}{\sigma^2} = \dfrac{cov(T_1,T_2)}{\sqrt{\mathcal{D}T_1}\sqrt{\mathcal{D}T_2}} = \rho(T_1,T_2) \ge 1$, но $|\rho| \le 1 \Rightarrow \rho(T_1,T_2) = 1$

$\rho(T_1,T_2) = 1 \Rightarrow T_1 \overset{п.н.}{=} aT_2 + b \Rightarrow \{\mathbb{E}T_1 = \mathbb{E}T_2 = \theta\} \Rightarrow \theta = a\theta + b \Rightarrow \theta(1-a) = b \Rightarrow cov(T_1,T_2) = \mathbb{E}(T_1 - \mathbb{E}T_1)(T_2 - \mathbb{E}T_2) = \mathbb{E}(aT_2 + b - \theta)(T_2 - \theta) = \mathbb{E}(aT_2 - \theta a)(T_2 - \theta) = a\,\mathbb{E}(T_2 - \theta)^2 = a\sigma^2$

$\rho = 1 = \dfrac{cov(T_1,T_2)}{\sqrt{\mathcal{D}T_1}\sqrt{\mathcal{D}T_2}} = a \Rightarrow b = 0 \Rightarrow T_1 \overset{п.н.}{=} T_2$ $\square$